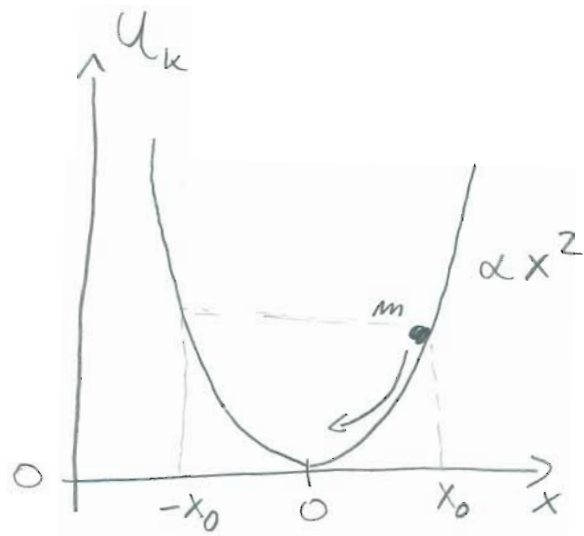
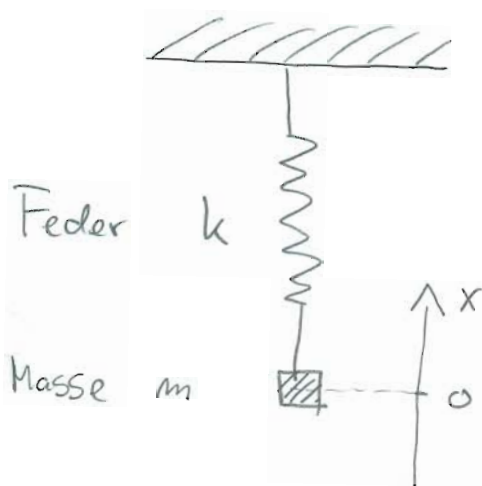


Eine Auswahl von Fragestellungen, die in der Physik IV ①
Vorlesung behandelt werden.

① Wie verhält sich ein harmonischer Oszillator bei
sehr kleinen Schwingungsamplituden?



- Rückstellkraft durch Feder mit Hookescher Konstante k

$$F_k = -kx \quad \Rightarrow \quad U_k = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{potentielle Energie}$$

- Trägheitskraft

$$F_k = -\frac{\partial}{\partial x} U_k$$

$$F = m\ddot{x}$$

- Bewegungsgleichung (aus Kräftegleichgewicht)

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

\Rightarrow harmonische Oszillation mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

- Im Oszillator gespeicherte Energie

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$$

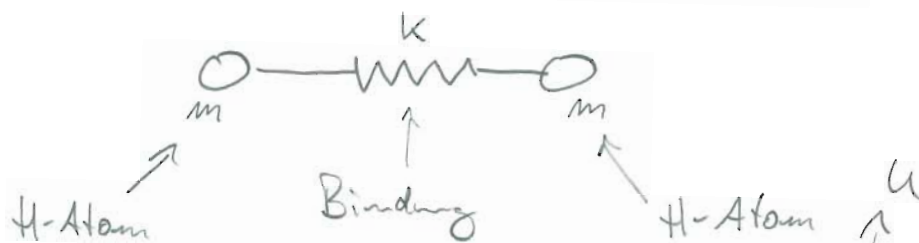
Schlussfolgerungen aus dieser klassische Mechanik Betrachtung:

(2)

- Der Oszillator kann eine beliebige potentielle Energie haben, die durch seine maximale Oszillationsamplitude x_0 bestimmt ist.
- Insbesondere ist für $x_0 = 0$ die Gesamtenergie $E_{\text{tot}} = 0$.

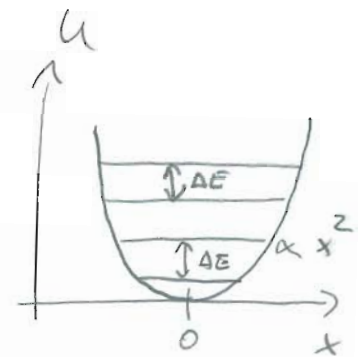
In der Natur findet man aber harmonische Oszillatoren für die diese Erwartungen nicht zu treffen.

- z.B. zwei-atomige Moleküle (H_2)



Dort findet man

$$E_{\text{tot}} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$



- mit der Quantenzahl $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
und $\hbar = \hbar 2\pi = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ für das Plancksche Wirkungsquantum.
- Die Gesamtenergie nimmt nur diskrete Werte an, die durch die natürliche Zahl n bestimmt sind.
 - Die möglichen Energien unterscheiden sich durch den Wert $\Delta E = \hbar \omega$
 - Die Gesamtenergie ist minimal für $n = 0$
 $E_{\text{tot}}(n=0) = \frac{1}{2} \hbar \omega \neq 0$

↳ Der Oszillator ist immer in Bewegung

Abschätzung der Oszillationsamplitude eines makroskopischen harmonischen Oszillators in einem quantenmechanischen Zustand mit kleiner n .

$$E_{\text{tot}}^{\text{kl.}} = E_{\text{tot}}^{\text{qm}}$$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2} h \nu$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{h}{m \omega}}$$

$$\text{mit } m = 1 \text{ kg}$$

$$\nu = 1 \text{ Hz}$$

$$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\Rightarrow x_0 \approx 4 \cdot 10^{-18} \text{ m}$$

$$\begin{array}{l} \text{Atomdurchmesser} \\ \text{Kern Durchmesser} \end{array} \quad a_0 \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} \\ \sim 10^{-15} \text{ m}$$

- Kann ein makroskopischer Oszillator sich bei gewöhnlichen Bedingungen in einem solchen Zustand befinden?

$$\bullet E_{\text{tot}}^{\text{qm}} = \frac{1}{2} h \nu = 3.3 \cdot 10^{-34} \text{ J}$$

$$\bullet E_{\text{th}} = k_B T = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

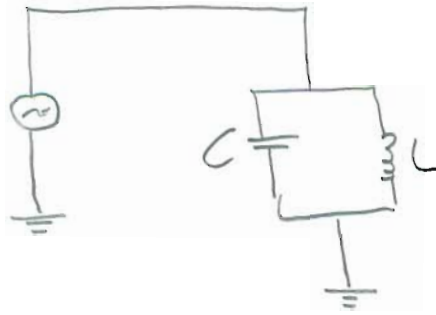
$$k_B = 1.3 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

thermische
Energie

Andere Beispiel-Systeme

(3)

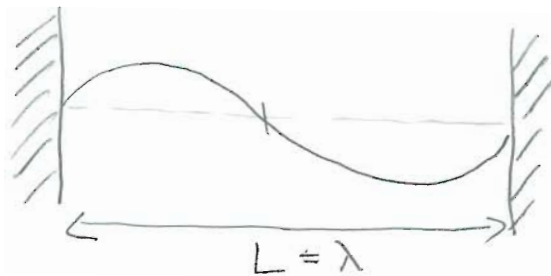
- der elektrische Oszillator



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

elektrische Resonanz-
frequenz

- elektromagnetische Wellen

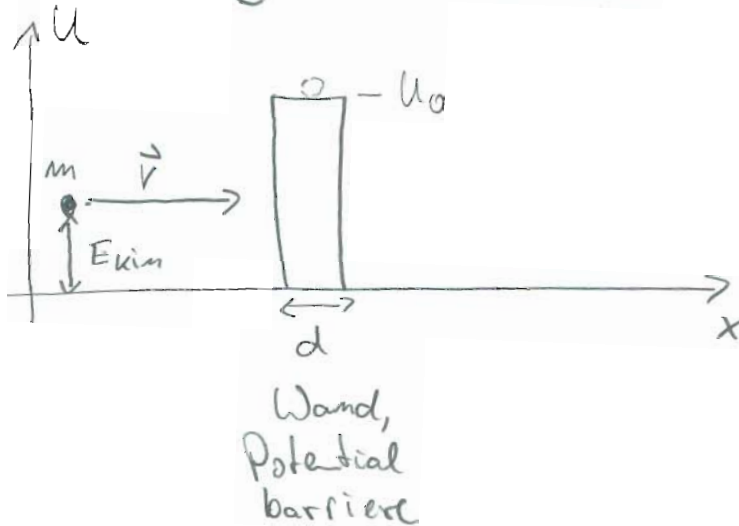


$$\omega = 2\pi \frac{c}{L}$$

- Schwingungen von Atomen in Festkörpern
- viele mehr

② Warum kann ein Ball nicht durch eine Wand fliegen, ein Elektron aber eine Potentialbarriere durchdringen? ④

- Beschreibung der Situation



U_0 : Höhe der Barriere
 d : Breite der Barriere
 m : Masse des Teilchens

• kinetische Energie des Teilchens

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

• potentielle Energie des Teilchens auf der Mauer

$$U_0 = m g h$$

h : Höhe der Mauer

- Klassische Erwartung:

$E_{kin} \leq U_0$: Teilchen übertritt die Potentialbarriere nie:

Reflektionswahrscheinlichkeit $R = 1$

Transmissionswahrscheinlichkeit $T = 0$

$E_{kin} > U_0$:

Teilchen übertritt die Barriere immer

$$R = 0$$

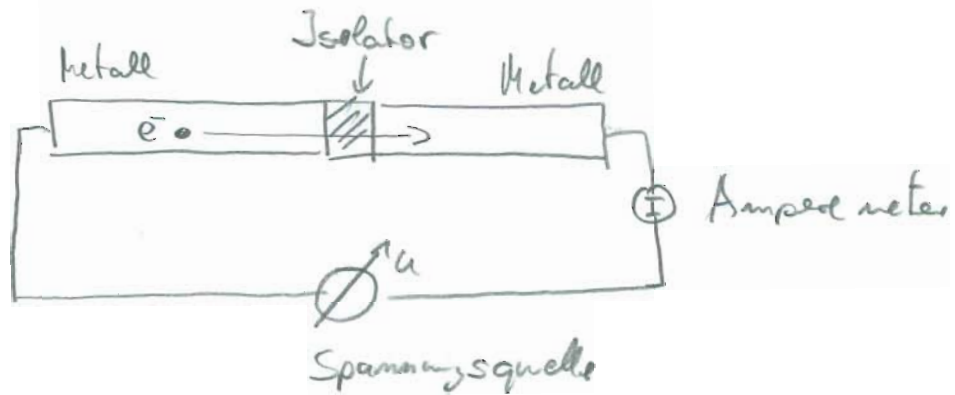
$$T = 1$$

Beobachtung: - Auch für $E_{kin} \leq U_0$ besteht eine endliche Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen die Barriere überquert

$$T = e^{-\frac{2\sqrt{2m(U_0 - E_{kin})}d}{\hbar}} \neq 0$$

- Der Effekt wird **Tunneln** genannt und kann mit Hilfe der Quantenmechanik beschrieben werden.

Beispiel:

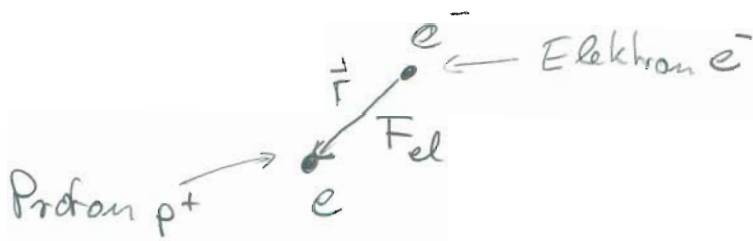


- Tunnel effekt für Elektronen durch Isolator. In Abhängigkeit von der angelegten Spannung fließt ein Strom obwohl die Metalle durch den Isolator voneinander getrennt sind.
- Auch der leere Raum (Vakuum) kann als Isolator dienen. Anwendung z.B. beim Tunnelmikroskop.

③ Warum sind Atome stabil?

⑥

Beispiel: Wasserstoff-Atom



$r = |\vec{r}|$: Abstand zw. p^+ und e^-

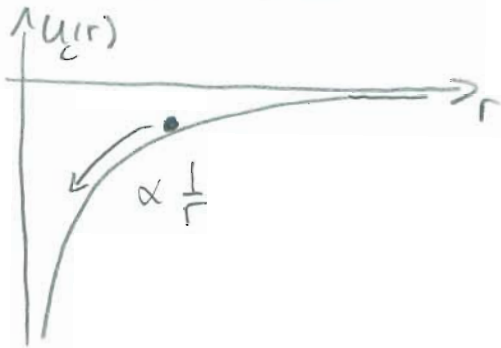
- Coulomb-Kraft zwischen e^- und p^+

$$\vec{F}_C(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \text{wirkt anziehend}$$

↑
elektrische Feldkonstante

- Coulomb-Potential

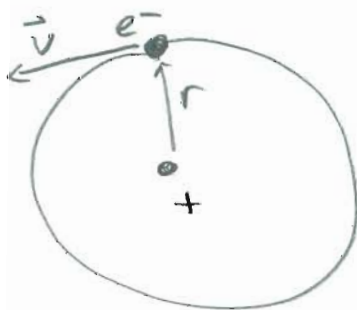
$$U_C(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$



- würde das e^- ruhen, fiel es in den Kern

- Gleichgewicht zwischen Coulomb-Kraft F_C und Zentrifugalkraft F_Z

$$F_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$



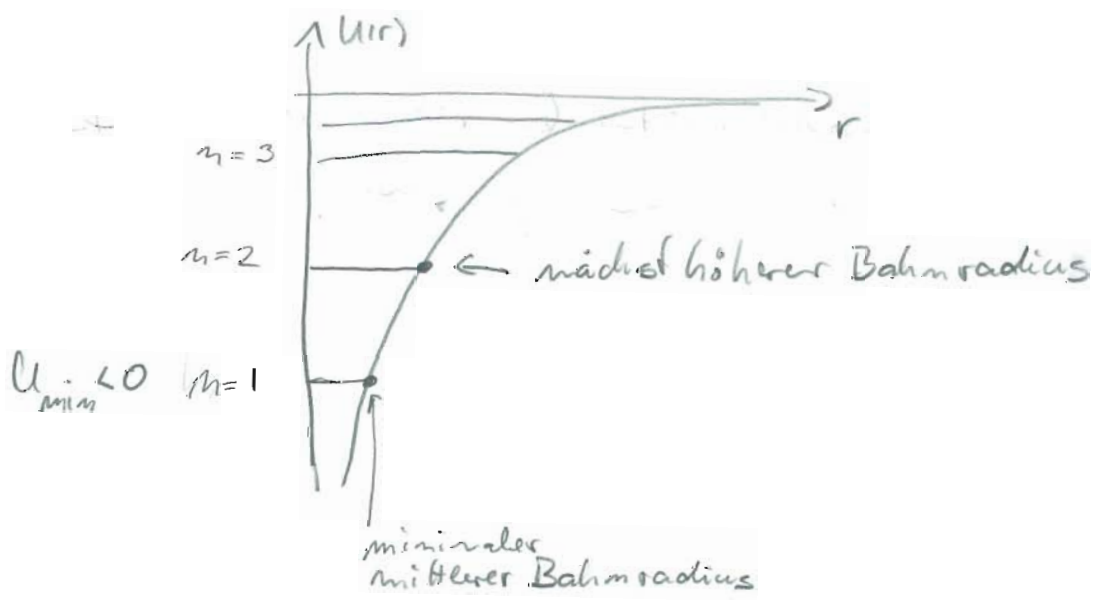
⇒ stabile Bahn für feste Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr}}$$

- ABER: Beschleunigte elektrische Ladungen strahlen elektromagnetische Wellen ab und verlieren somit Energie.

- Warum fällt das e^- nicht in den Atomkern?

- Die Quantenmechanik liefert die Antwort: Ähnlich wie beim harmonischen Oszillator existiert eine minimale Gesamtenergie für das Elektron und somit ein minimaler Bahnradius der nicht unterschritten werden kann.



- Sprünge des e^- zw. verschiedene Energien führen zu diskreten Spektren des Atoms

- Die Theorie der Quantenmechanik erlaubt es, **basierend** ^① auf einigen wenigen **Postulaten**, die zuvor beschriebenen Phänomene (und sehr viele weitere), die nicht mit Methoden der klassischen Physik verstanden werden können, zu erklären.
- Die Theorie der Quantenmechanik basiert auf fundamentalen Postulaten, die **nicht hergeleitet werden können**. Ihre Existenz ist gerechtfertigt durch die hohe Genauigkeit mit der sie die Phänomene, die wir in der Natur beobachten, beschreibt. \Rightarrow **Q.M. ist extrem erfolgreiche Theorie.**
- Warum sind quantenmechanische Phänomene häufig weniger anschaulich als klassische?
 - Die meisten q.m. Effekte treten bei **mikroskopisch kleinen Objekten** (Atome, Elektronen, Nucleonen, Photonen, ...) auf.
 - Die Energien bei denen die Effekte relevant werden sind **klein** gegenüber der **Energieskala**, die im Alltag vorkommt.
 - Es ist schwieriger mit einfachen Mitteln die Q.M. im Rahmen von Vorlesungsexperimenten zu veranschaulichen.
 - **ABER:** Im vielen Labors an der ETH können sie sich mit der Quantenmechanik experimentell auseinandersetzen.
 - Viele der in der Vorlesung zu diskutierenden Beispiele werden im Labors der ETH im Detail untersucht.

- Der "tägliche" Umgang mit der Q.M. erlaubt Ihnen $\textcircled{4}$ **Verständnis** und **Intuition** in dieses Gebiet zu erlangen.
- In dieser Vorlesung soll die Verwendung des **Formalismus** der Q.M. **motiviert** und an **experimentell relevanten Beispielen** demontriert werden.
- Die **formalen Aspekte** der Q.M. werden in der **theoretischen Vorlesung QM I und QM II** weiterentwickelt werden.

Wellen und Teilcheneigenschaften vom Licht

①

• charakteristische Welleneigenschaften

- Beugung
- Interferenz

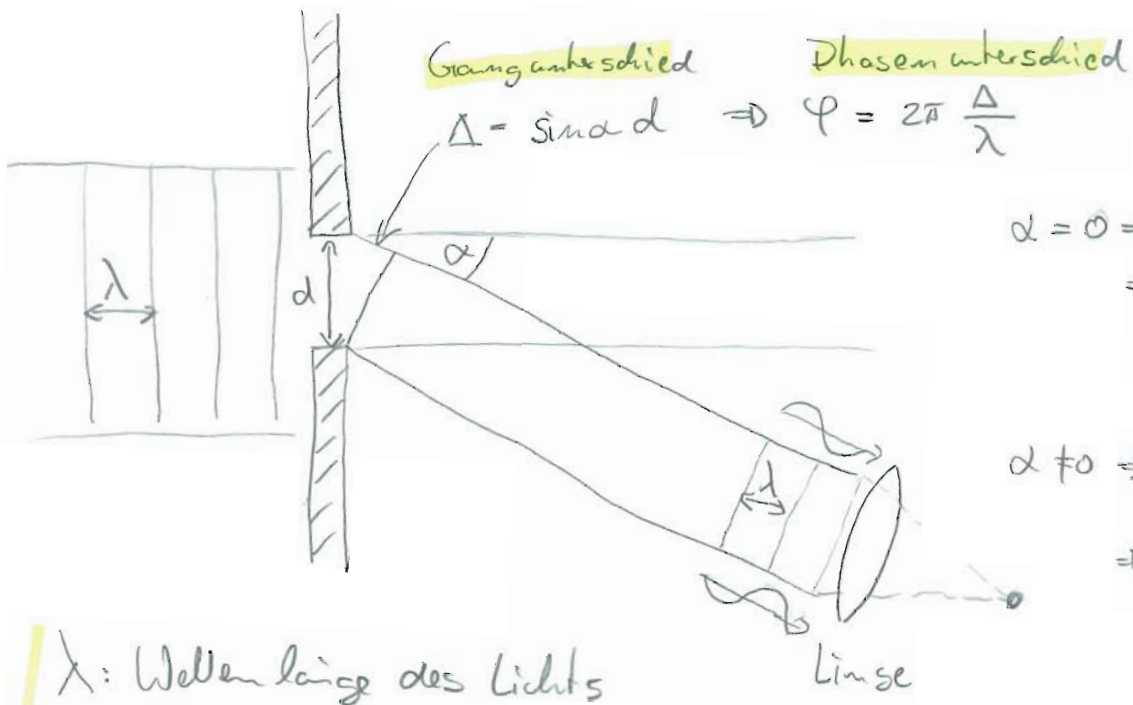
Beispiele: - Beugung am Einzelspalt
- Interferenz am Doppelspalt
- Interferenz an Gitter

• charakteristische Teilcheneigenschaften

- Energieerhaltung
 - Impulserhaltung
- } gelten für einzelne Licht-Teilchen

Beispiele: - Photoeffekt
- Compton-Effekt

Biegung an Spalt:



- λ : Wellenlänge des Lichts
- d : Spaltbreite
- α : Biegungswinkel
- Δ : Gangunterschied

Eine ebene elektromagnetische Welle fällt auf einen Spalt. Die Wellenlänge λ des Lichts sei ähnlich der Breite d des Spalts.

Unter dem Biegungswinkel α ergibt sich ein Gangunterschied

$$\Delta = \sin \alpha d$$

Zwischen den Rändern des gebeugten Strahls. Beträgt dieser Gangunterschied ein vielfaches der Wellenlänge $\Delta = n \lambda$, und wird der Strahl durch eine Linse auf einen Punkt abgebildet so liegt unter dem Winkel

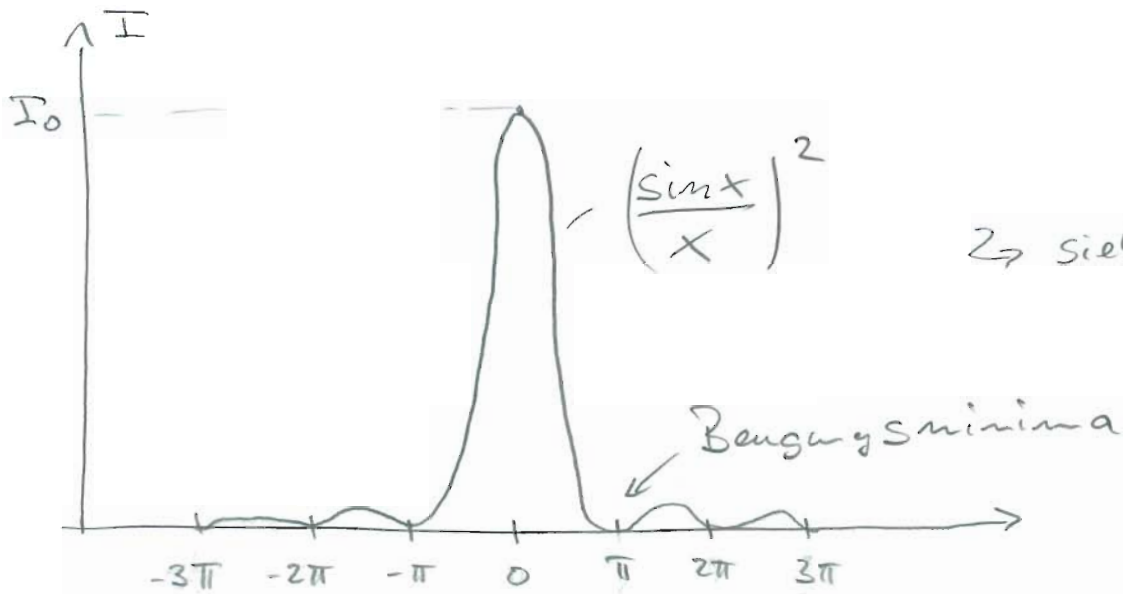
$$\sin \alpha_{\text{min}} = \frac{n \lambda}{d}$$

ein Minimum der gebeugten Intensität der Welle vor.

Am Spalt gilt für die Intensitätsverteilung:

②

$$I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \quad \text{mit} \quad x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha$$



→ siehe Übungsaufgabe

$$x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}$$

• Minima treten auf bei $x_{\text{Min}} = m\pi$

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\text{min}} = \frac{m\lambda}{d}$$

• Beispiel

$$d = 1 \text{ mm}$$

$$\lambda = 600 \text{ nm}$$

$$\alpha_{\text{min}} \sim \frac{\lambda}{d} = 0.6 \text{ mrad}$$

$$\sim 2' = 0.03^\circ$$

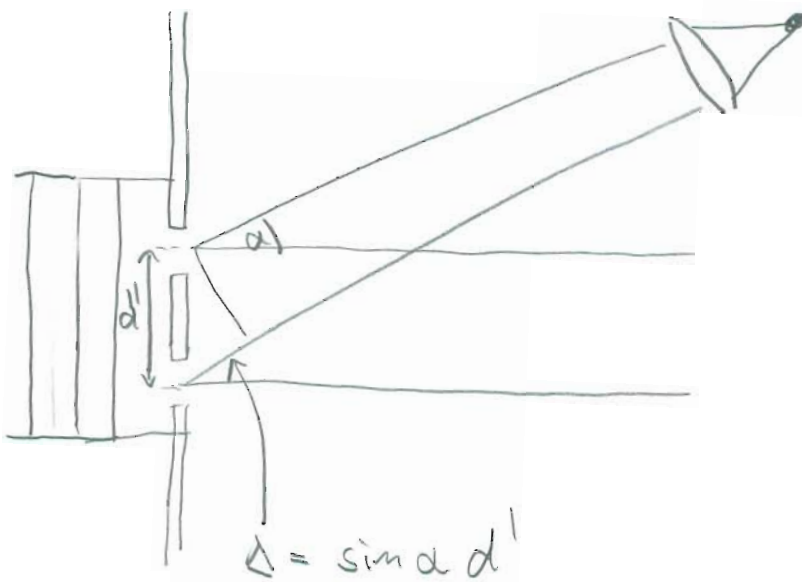
⇒ sehr kleine Beugungswinkel für kleine λ/d !

Bemerkung: Das Beugungsmuster des Spaltes lässt sich durch Fourier-Transformation der Spaltfunktion berechnen.



Abbildung: Interferenz am Doppelspalt

(3)



Die zwei Teilstrahlen interferieren konstruktiv oder destruktiv, je nach Gangunterschied Δ

- $\sin \alpha_{\max} = \frac{n\lambda}{d'}$

konstruktiv für ganzzahligen Gangunterschied

- $\sin \alpha_{\min} = \frac{n\lambda}{2d'}$

destruktiv für halbzahligen Gangunterschied

2 → Intensitätsverteilung wird im Übung berechnet.

2 → Überlagerung der Beugung an Einzelspalt mit der Interferenz der zwei Teilstrahlen.

$$I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 (\cos z)^2 \quad \text{mit} \quad z = \frac{\pi d'}{\lambda} \sin \alpha$$

$$x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha$$