

# 1. Das Photon

## 1.1. Wellen- und Teilcheneigenschaften von Licht

### Klassische Welleneigenschaften:

Huygens und Young (17.-18. Jh.):

- Licht hat Welleneigenschaften
- Beugung, Interferenz, etc.

Maxwell (1885):

- elektromagnetische Strahlung wird beschrieben durch die Maxwellgleichungen
- elektrische  $E$  und magnetische  $B$  Felder der Frequenz  $\omega$

Erzeugung von Licht:

- beschleunigte Ladungen erzeugen Licht
- Antennen/Sender
- Bremsstrahlung (Röntgenstrahlung)
- Synchrotronstrahlung
- Temperaturstrahlung (schwarze Strahler)

### Quantenmechanische

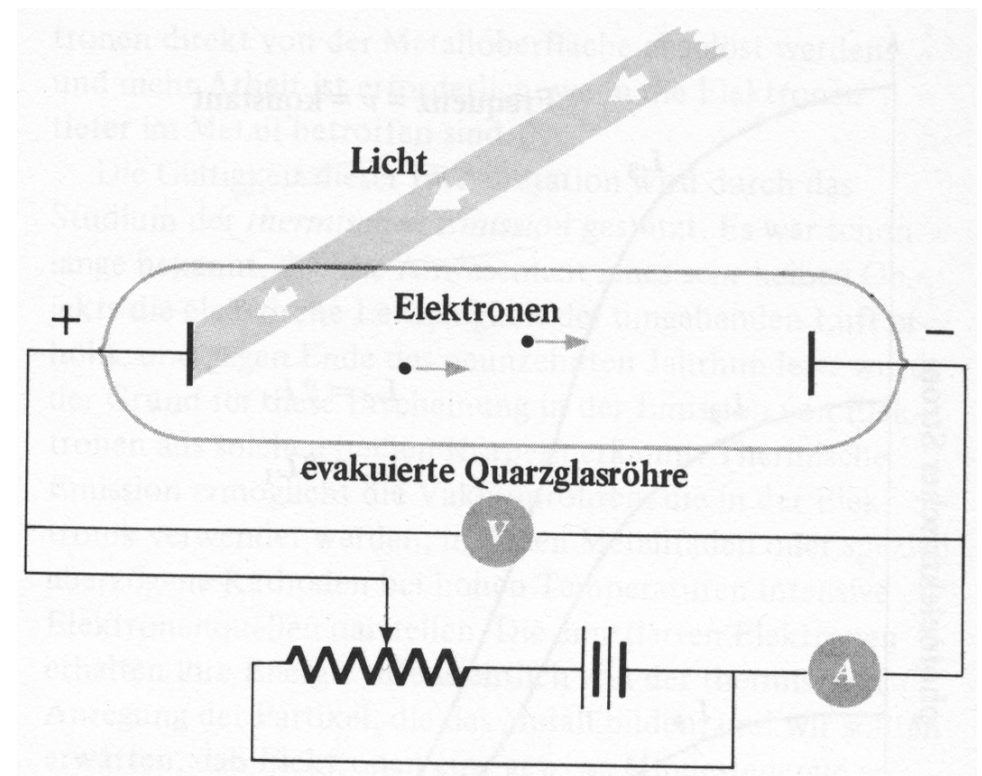
### Teilcheneigenschaften des Lichts:

Teilchen/Quant	Photon	
Energie	$E = h \nu$	(Bsp.: Photoeffekt, Temperaturstrahlung)
Ausbreitungsgeschwindigkeit	$c$	
Masse	$m_0 = 0$	
Impuls	$p = h\nu/c = h/\lambda$	(Bsp.: Compton-Effekt)
Drehimpuls	$h/2\pi$	

## 1.2 Der Photoeffekt

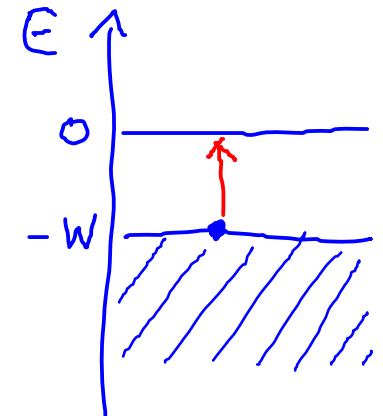
### Beobachtung: **Photoelektrische Emission**

- Licht von genügend hoher Frequenz (ultraviolett:  $\lambda \sim 1 - 400 \text{ nm}$ ), das auf eine Alkalimetall Oberfläche fällt, löst Elektronen aus dem Metall heraus.
- Messung (A) des Photostroms  $I$ , der zwischen einer Anode (+) und einer Kathode (-) in einer evakuierten Röhre fließt. Durch Anlegen einer Bremsspannung (V) kann der Strom reduziert und vollständig unterdrückt werden.



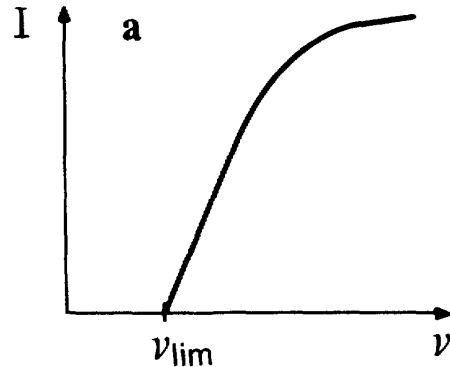
### ähnlicher Effekt: **Thermische Emission:**

- Elektronen können auch thermisch aus der Oberfläche eines Metalls durch Heizen auf hohe Temperaturen emittiert werden, z.B. wenn ein hoher Strom Metall durchfließt.
- In diesem Fall wird thermische Energie verwendet, um die Austrittsarbeit  $W$  des Metalls zu überwinden.  $W$  kann so experimentell bestimmt werden.
- Typische Werte für die Austrittsarbeit eines Metalls:  $W(\text{Li}) = 2.46 \text{ eV}$ ,  $W(\text{Na}) = 2.28 \text{ eV}$ ,  $W(\text{K}) = 2.25 \text{ eV}$ ,  $W(\text{Rb}) = 2.13 \text{ eV}$ ,  $W(\text{Cu}) = 4.48 \text{ eV}$ ,  $W(\text{Pt}) = 5.36 \text{ eV}$
- Dieser Prozess kann in Vakuumröhren genutzt werden, um freie Elektronen zu erzeugen (Röhrenfernseher, Elektronenmikroskop, Röntgenröhre, ...).



## 1.2.1 Messung des Photostroms: Quantitative Untersuchung des Photoeffekts

Abhängigkeit des Photostroms  $I$  von der Frequenz  $\nu$  des eingestrahlten Lichts bei fester Spannung  $V$ .

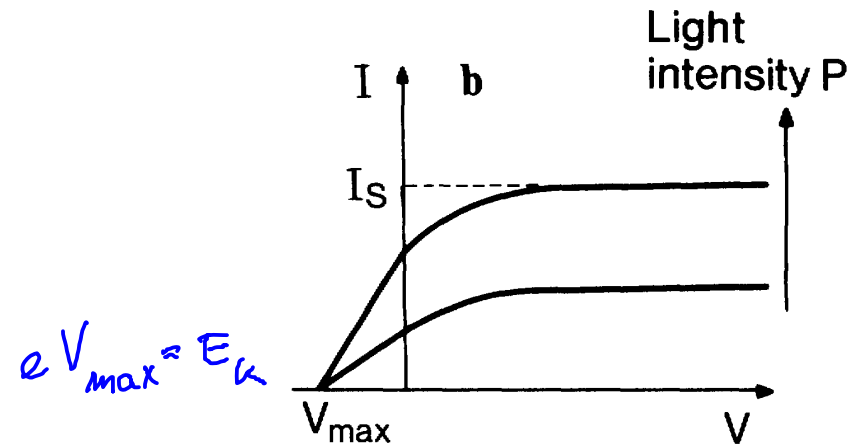


- Kein Strom unterhalb einer materialabhängigen Grenzfrequenz  $\nu_{lim}$  des eingestrahlten Lichts.

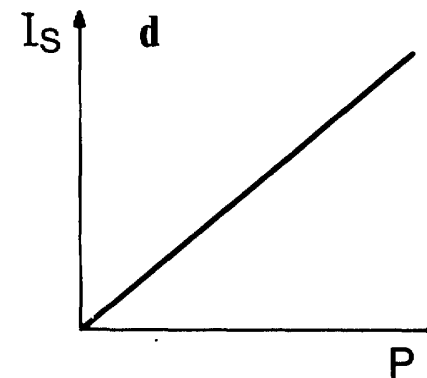
Weitere Beobachtungen:

- Verteilung der Elektronenenergie ist unabhängig von der Intensität  $P$  des Lichts.
- Elektronen werden nach wenigen Nanosekunden ( $10^{-9}$  s) bei Einstrahlen des Lichts emittiert.

Abhängigkeit des Photostroms  $I$  von der Beschleunigungsspannung  $V$  für verschiedene Lichtintensitäten  $P$  bei fester Frequenz  $\nu > \nu_{lim}$ :



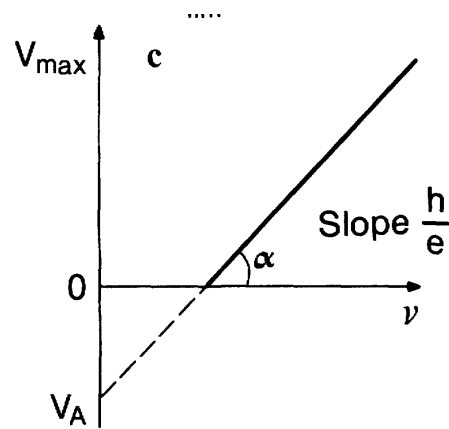
- Kein Strom unterhalb von  $V_{max}$ , hängt von der Frequenz des Lichts ab. Sättigung des Stroms  $I_s$  für grosse positive Spannungen  $V$ .
- Abhängigkeit des Sättigungsstroms  $I_s$  von der Lichtintensität  $P$ :



- Änderung der Intensität  $P$  des Lichts ändert die Zahl der emittierten Elektronen, also auch  $I_s$ .

## 1.2.2 Maximale kinetische Energie $E_{kin}$ der Photoelektronen in Abhängigkeit von der Frequenz $\nu$ des eingestrahlten Lichts

$$E_{kin,max} = eV_{max}$$



- es gibt eine materialspezifische Grenzfrequenz  $\nu_{lim}$  für die Emission von Elektronen
- maximale kinetische Energie der Elektronen hängt linear von der Frequenz  $\nu$  des Lichts ab
- die Proportionalitätskonstante ist unabhängig vom verwendeten Metall
- Die Proportionalitätskonstante kann bestimmt werden zu  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ . Dies ist das Planck'sche Wirkungsquantum

### Erklärung des Photoeffekts:

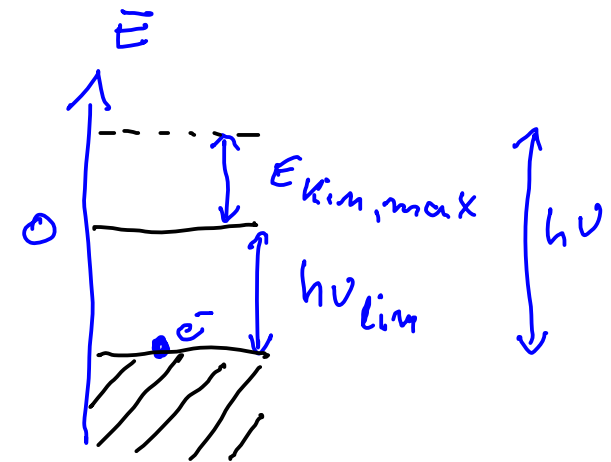
Energie des Photons

$$h\nu = E_{kin,max} + W$$

maximale Energie des Elektrons

Austrittsarbeit  $W$ : die zum Austritt eines Elektrons aus der Metalloberfläche benötigte Energie:

$$W = h\nu_{lim}$$

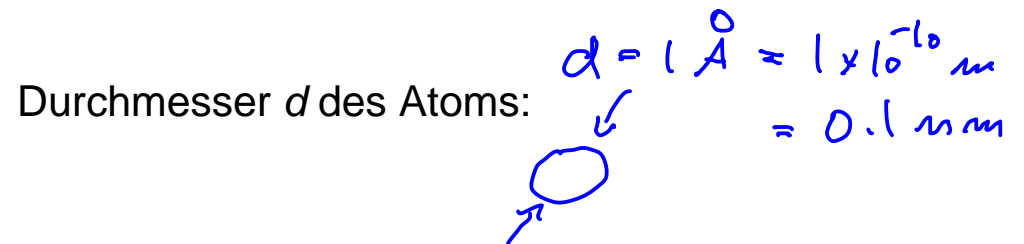
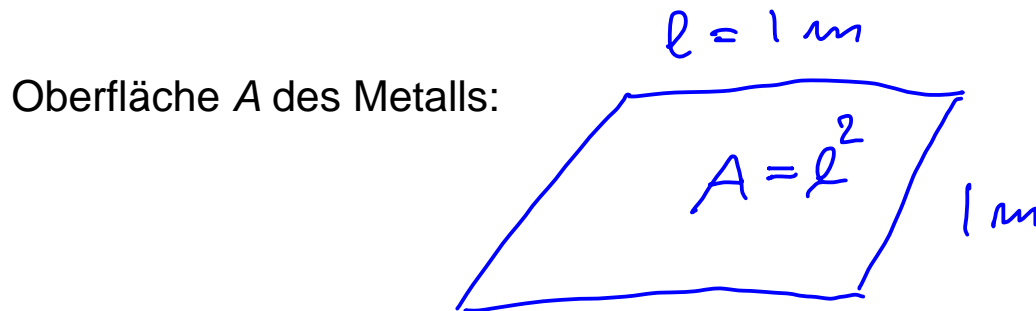


## Die Emissionszeit: Versuch einer klassischen Erklärung

**Beobachtung:** Instantane Emission von Elektronen aus der Oberfläche eines Metalls bei Lichtintensitäten von

$$I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Abschätzung des durchschnittlichen Energiegewinns eines Elektrons an der Oberfläche A des Metalls



Anzahl  $N$  der Atome in der obersten Gitterebene des Metalls:

$$N \sim A/d^2 = 10^{20}$$

mittlerer Energiegewinn pro Elektron (ein  $e^-$  pro Atom) pro Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} I/N &\sim 10^{-26} \text{ W} \\ &\approx 10^{-7} \text{ eV/s} \end{aligned}$$

**Resultat:** Es sollte  $10^7$  Sekunden dauern bis alle Elektronen im Mittel ausreichend Energie absorbiert haben, um die Austrittsarbeit von  $1 \text{ eV}$  aus dem Licht zu absorbieren.

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

## Einsteins Erklärung des Photoelektrischen Effekts (1905):

- Licht besteht aus einzelnen Quanten, die wir Photonen nennen.
- Die Energie eines einzelnen Photons ist gegeben durch  $E = h \nu$
- $\nu$  ist die Frequenz des Photons,  $h$  ist die Planck'sche Konstante

Anwendungen des fotoelektrischen Effekts:

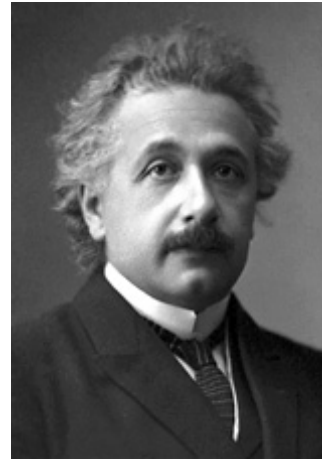
- Fotosensoren
- Detektoren für elektromagnetische Strahlung

### Literatur zum Fotoeffekt:

Kaenzig: Abschnitt 1.2

Beiser: Abschnitt 2.3

Haken&Wolf: Abschnitt 5.3



Nobelpreis in Physik (1906)

Albert Einstein

"for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect"

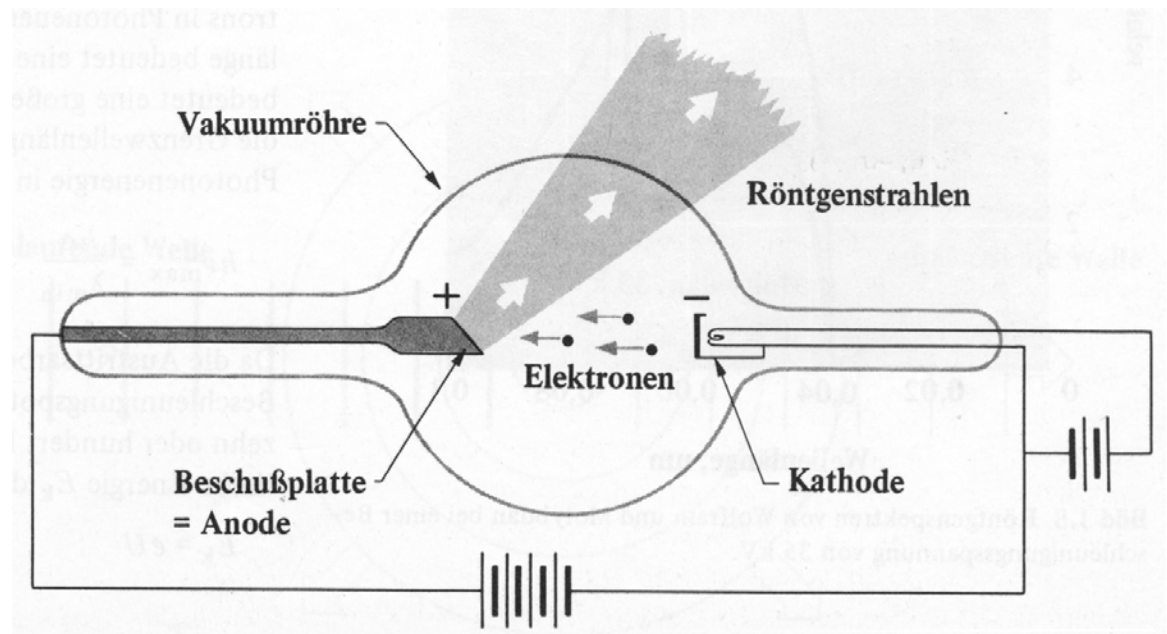
## 1.3 Röntgenstrahlung und ihre Erzeugung

schematische Darstellung einer Röntgenröhre:

- Erzeugung elektromagnetischer Strahlung durch hochenergetische Elektronen, die auf eine Metalloberfläche auftreffen.
- "Inverser Photoeffekt"

charakteristische Eigenschaften der Röntgenstrahlung:

- Breitet sich geradlinig und unabhängig von elektrischen oder magnetischen Feldern aus.
- Intensität steigt mit einfallendem Elektronenfluss.
- Schnellere Elektronen erzeugen höherenergetische Röntgenstrahlung.
- Röntgenstrahlung ruft Reaktionen in Photosensitiven Materialien hervor.
- Sie kann Fluoreszenz oder Phosphoreszenzstrahlung erzeugen.



Erster Nobelpreis in Physik (1901)

### Wilhelm Conrad Röntgen

"in recognition of the extraordinary services he has rendered by the discovery of the remarkable rays subsequently named after him"

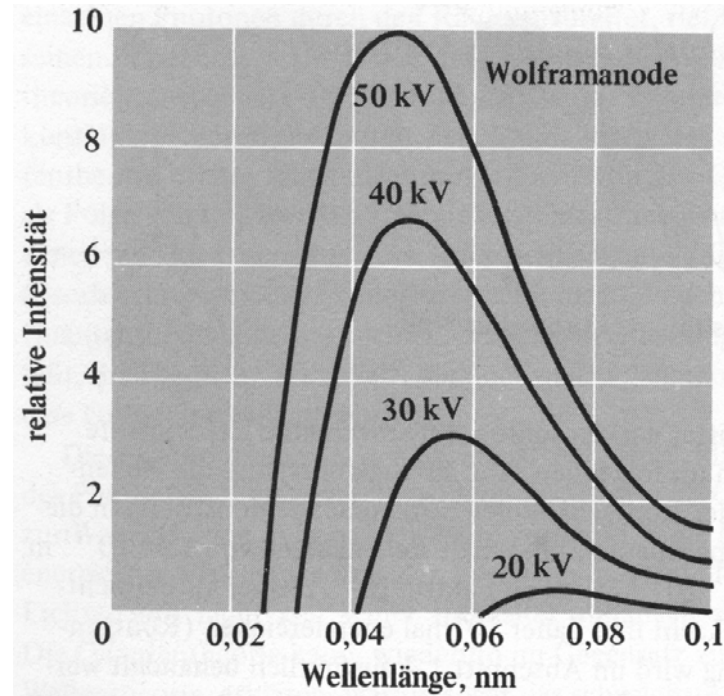


Das allererste Röntgenbild:  
Die Hand von Konrad Röntgens Ehefrau.

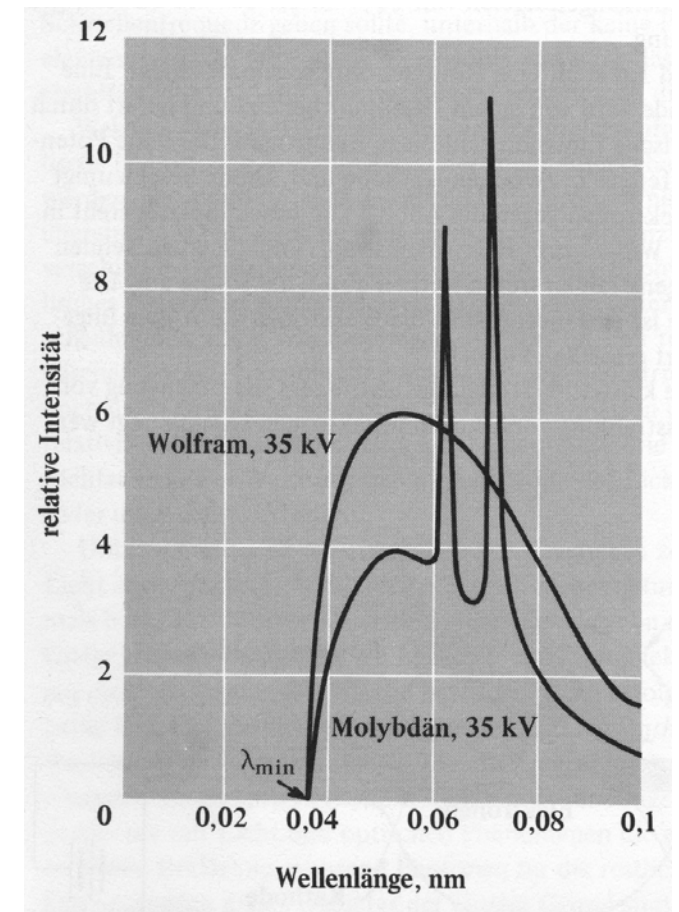
### 1.3.1 Röntgenspektren

Beobachtungen:

- Bremsstrahlung: Kontinuierliches Spektrum erzeugt durch in Vielfachstreuung abgebremste Elektronen.
- Untere Grenzwellenlänge  $\lambda_{min}$  (obere Grenzfrequenz  $\nu_{max}$ ) bestimmt durch maximale Elektronenergie  $E_{kin}^{max} = e U$  bei Beschleunigungsspannung  $U$ .
- Grenzfrequenz ist nur abhängig von  $E_{kin}^{max}$  und unabhängig vom Material



Wolfram ( $_{74}W$ )



Molybdän ( $_{42}Mo$ )

Grenzwellenlänge, -frequenz:

$$E_{kin, max} = eU = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

- Typischer Wellenlängenbereich für Röntgenstrahlung:  $\lambda = 10^{-11} - 10^{-8} m = 0.01 - 10 nm$
- Für Material charakteristische Intensitätsmaxima bei  $\lambda \sim 1/Z^2$  im Spektrum (siehe Mo). Detaillierte Erklärung folgt.



### 1.3.2 Röntgenbeugung an Einkristallen

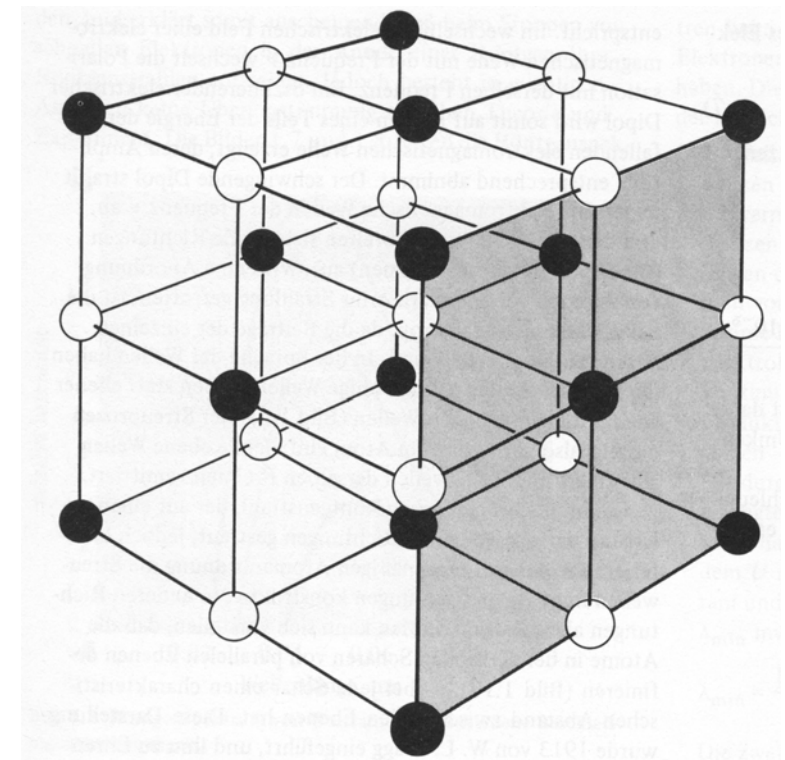
Betrachte Beugung an einfach kubischem Gitter. Atome sind im Kristall auf der Subnanometerskala regelmässig angeordnet.

Technik wird ausgiebig in der Festkörperphysik angewandt. (siehe Lit.: Ibach-Lüth, Kap. 2 & 3)

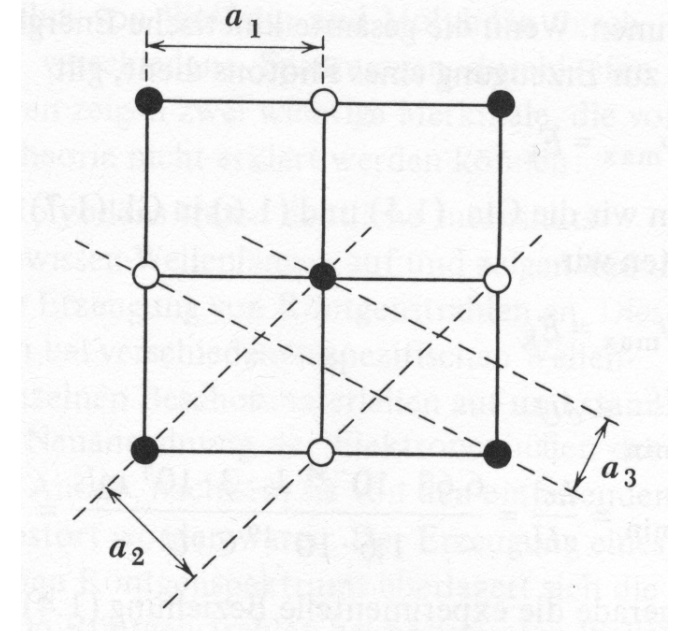
NaCl Einkristall, einfach kubisches Gitter:

Analogie zur Optik:

- Beugung an einem regelmässigen Gitter mit Periode  $a$
- Wellenlänge  $\lambda$  der Strahlung (0.01 nm to 10 nm) muss vergleichbar zur Gitterkonstanten  $a$  sein.
- Übung: Beugung am Spalt, Interferenz am Doppelspalt, Interferenz am Gitter

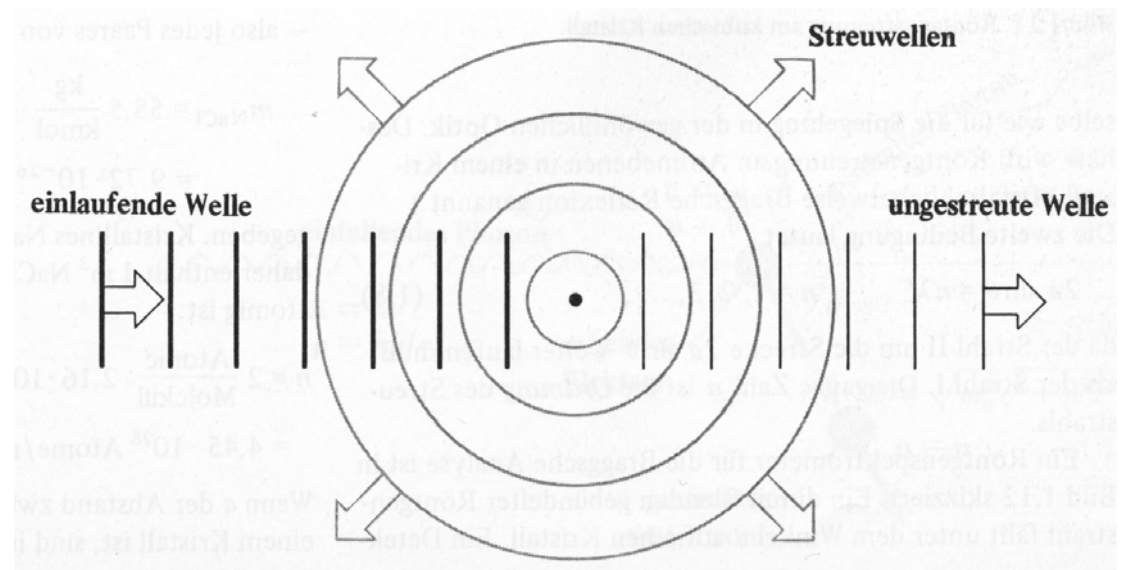


Braggsche Gitterebenen



## Prinzip von Huygens:

- Streuung der Röntgenstrahlung von einem Punkt-Objekt (ein einzelnes Atom).
- Gestreute Wellen der Punktquellen interferieren.
- Konstruktive Interferenz tritt nur in bestimmte Richtungen auf.
- Berechne diese Richtungen.

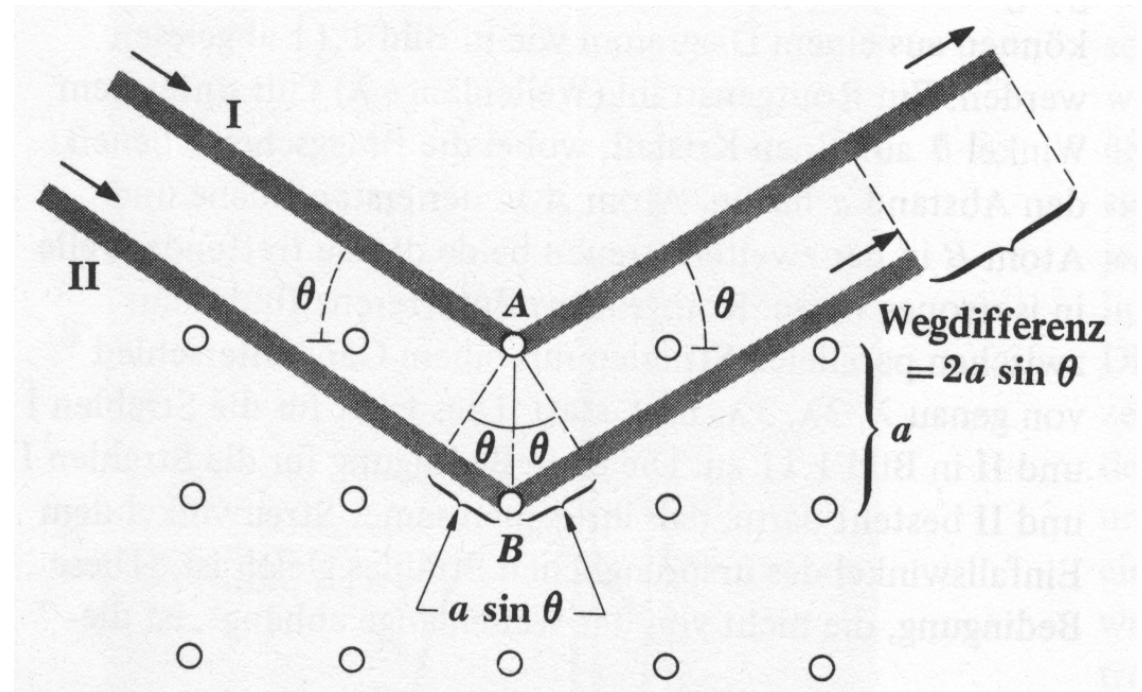


## Braggsche Interferenzbedingung

1. Betrachte zwei Strahlen mit dem selben Einfall- und Ausfallwinkel  $\theta$ .
2. Wegunterschied der beiden Strahlen muss zu konstruktiver Interferenz führen, d.h. ein vielfaches der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sein.

$$2a \sin \theta = n \lambda$$

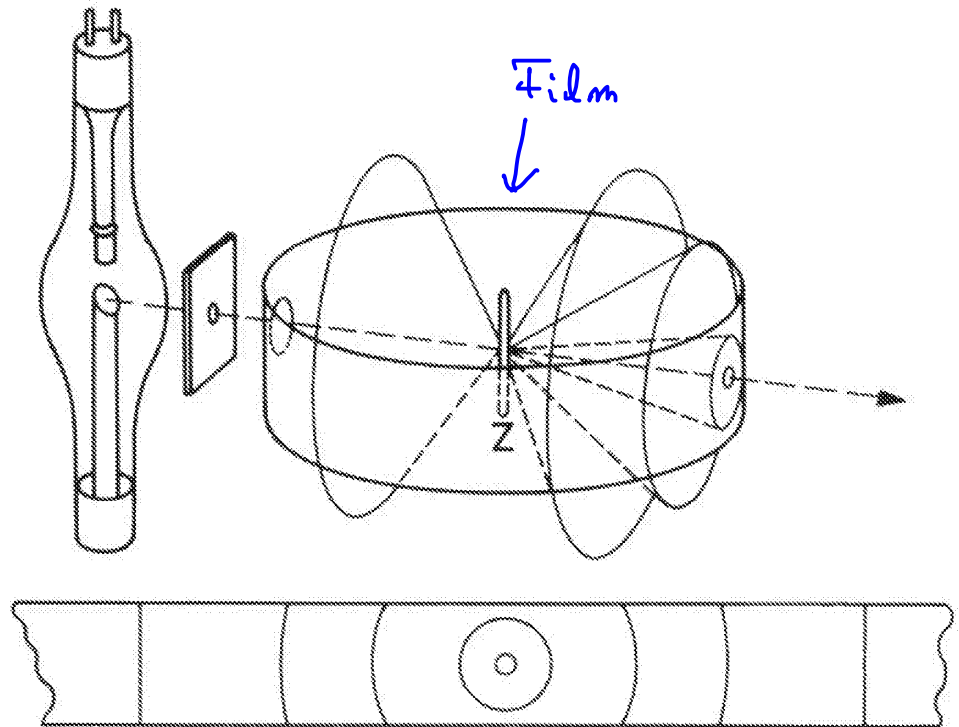
$$\text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$



Nur wenn beide Bedingungen erfüllt sind ist konstruktive Interferenz zu beobachten.

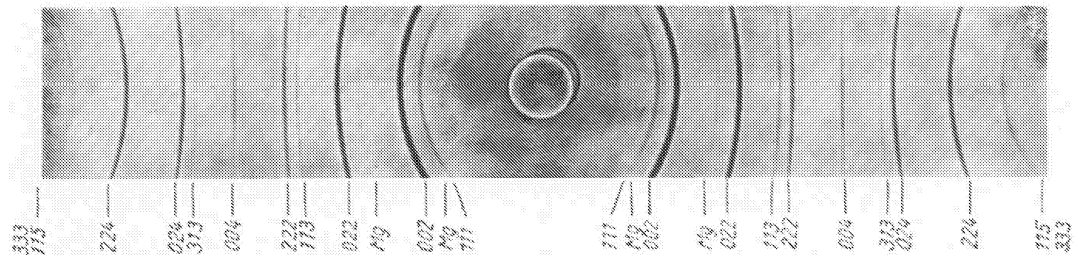
## Debye-Scherrer Verfahren: Ein Beispiel zur Röntgenbeugung

- Beugung an polykristalliner oder pulverförmiger Probe (Z)
- monochromatische Röntgenquelle mit Hilfe von Filter oder unter Nutzung charakteristischer Röntgenlinien (Erklärung folgt in späterer Vorlesung)
- Interferenzmaxima liegen auf Kegeln



typisches Ergebnis:

- Konstruktive Interferenz unter Streuwinkeln die mit verschiedenen Gitterebenen im Kristall identifiziert werden können. Abbildung auf photographischem Film.

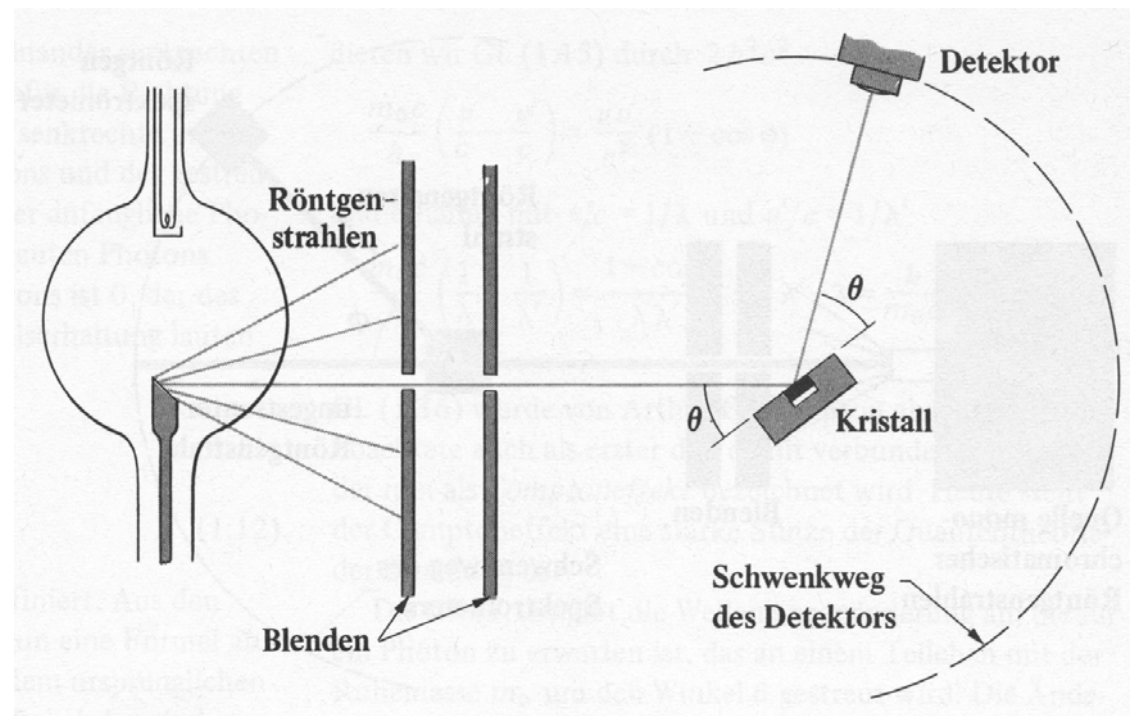


- typische Gitterkonstanten  $a$ :
 

NaCl	5.63 Å	(sc)	$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
KCl	6.29 Å	(sc)	
Cu	3.61 Å	(fcc)	
Al	4.05 Å	(fcc)	

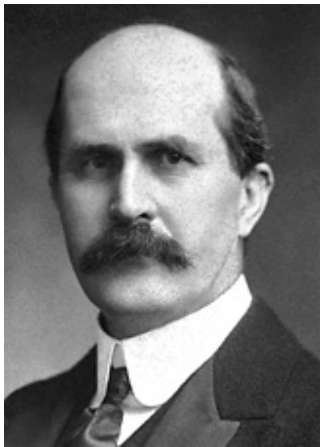
## Messaufbau zur Röntgenbeugung:

- Übung: Bestimme die Gitterkonstante  $a$  des kubischen Gitters von NaCl ausgehend von seiner Dichte  $\rho$  und der molaren Masse. Unter welchen Winkeln treten Intensitätsmaxima in der Röntgenbeugung auf?
- Ebenfalls: Bestimmung der Wellenlänge bei bekannter Gitterkonstante.



## Nobel Preis in Physik (1915)

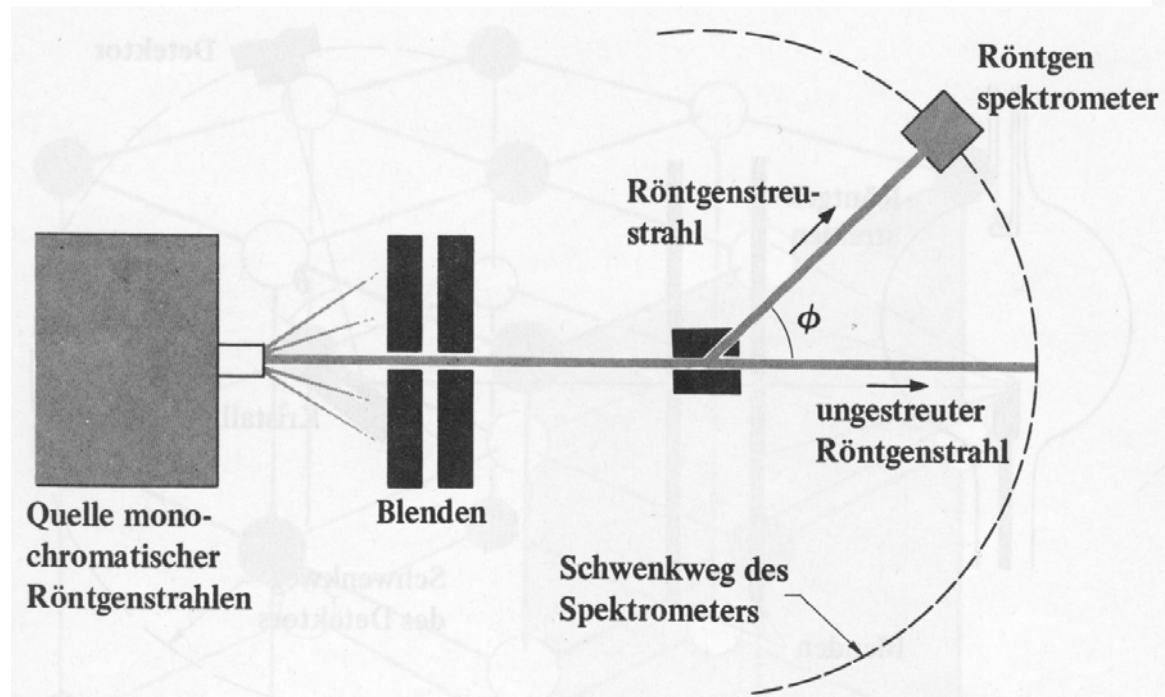
Sir William Henry Bragg William Lawrence Bragg



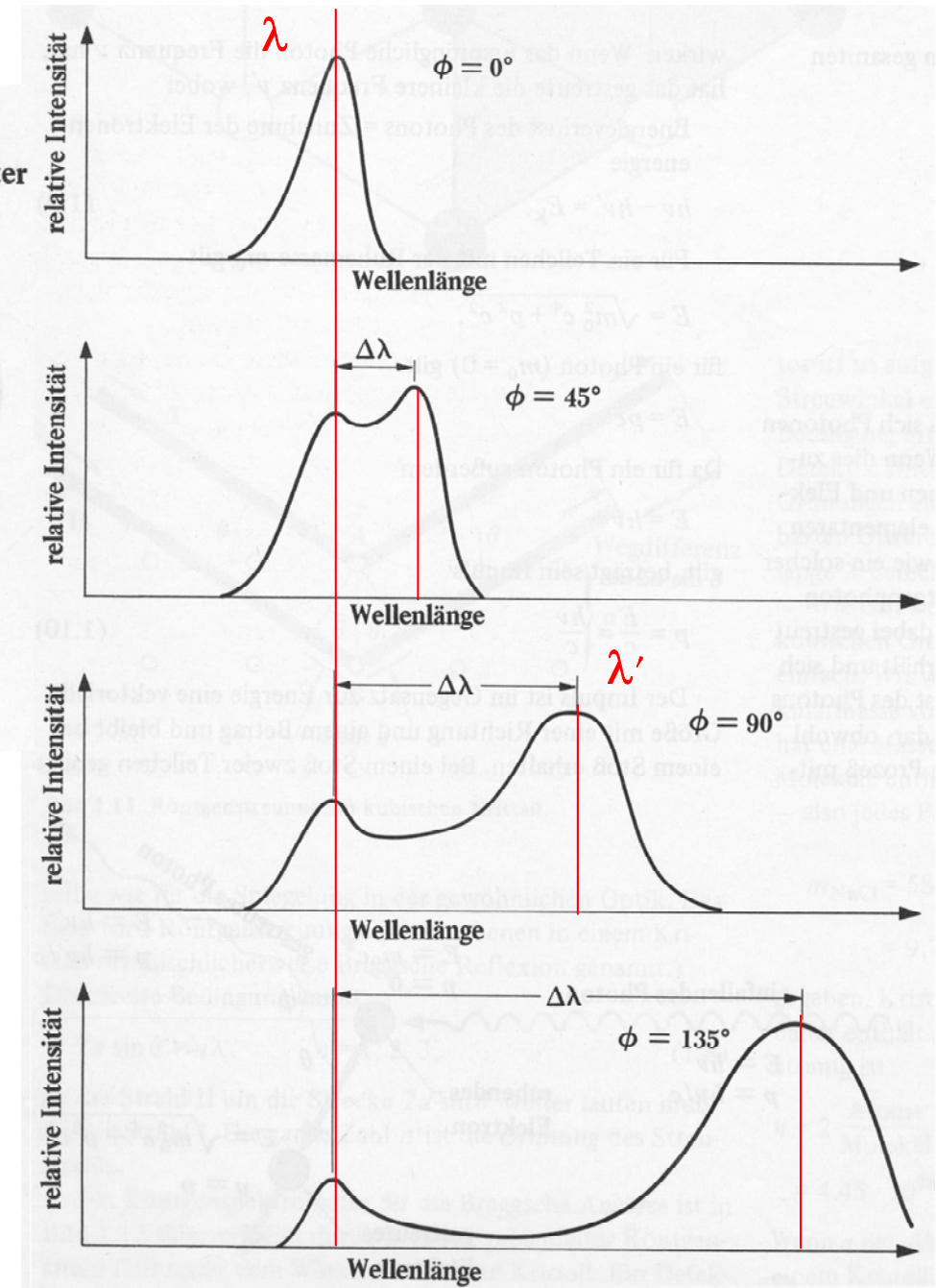
"for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays"

## 1.4 Der Compton-Effekt

betrachte die Streuung von Röntgen-Photonen an (quasi) freien Elektronen (Experiment in der Vorlesung)



Compton-Spektren: Abhängigkeit der gestreuten Intensität von der Wellenlänge



- unter  $\phi = 0$  gemessenes Spektrum zeigt Maximum bei Wellenlänge  $\lambda$  der einfallenden Photonen
- unter Streuwinkeln  $\phi > 0$  tritt ein zusätzliches (Compton) Maximum bei der Wellenlänge  $\lambda'$  auf
- bei  $\phi > 0$  verbleibt ein Maximum im Spektrum bei der Wellenlänge  $\lambda$  durch Streuung an stärker gebundenen Elektronen (kann als höhere effektive Masse des Elektrons  $m_0^*$ , die durch stärkere Bindung an den Atomkern auftritt, erklärt werden)

# 1.4.1 Experiment zum Compton-Effekt

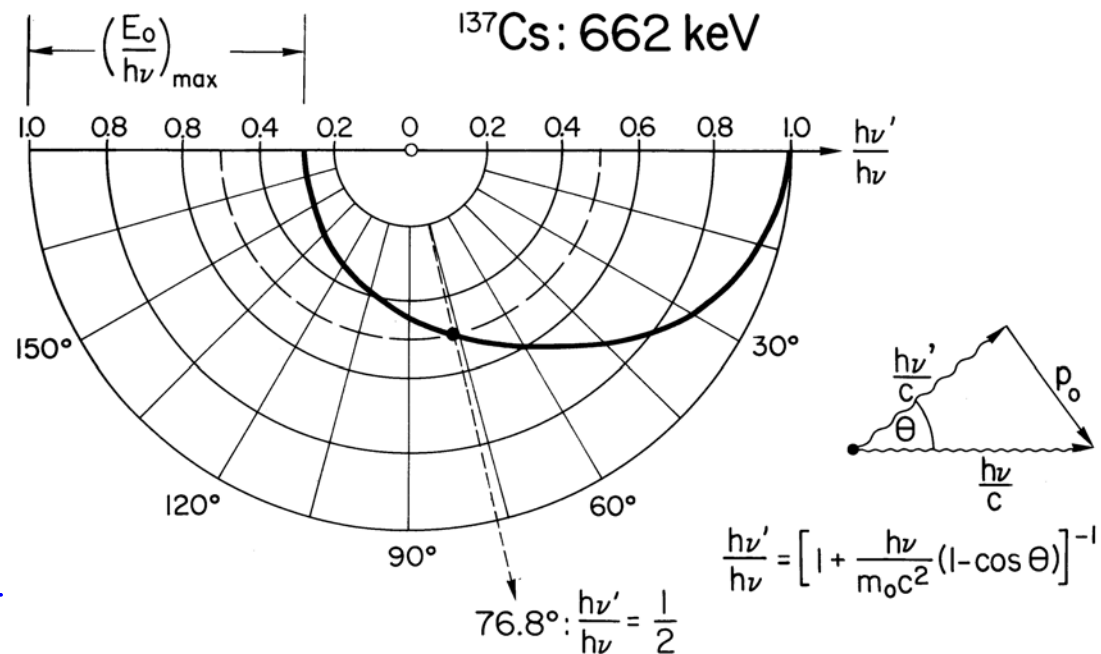
Nachweis des Impulses eines Photons.

## Aufbau:

- Quelle hochenergetischer Photonen (Röntgenstrahlen, oder hier Gammastrahlen)
- Streukörper mit (quasi) freien Elektronen. Freies Elektronengas in gut leitfähigen Festkörpern, hier Cu.
- Photodetektor, hier Szintillationszähler mit Sekundärelektronenvervielfacher



Messergebnis:

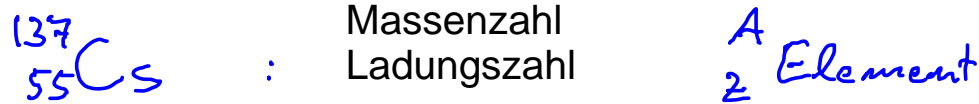


$$h\nu = 0.662 \text{ MeV}$$

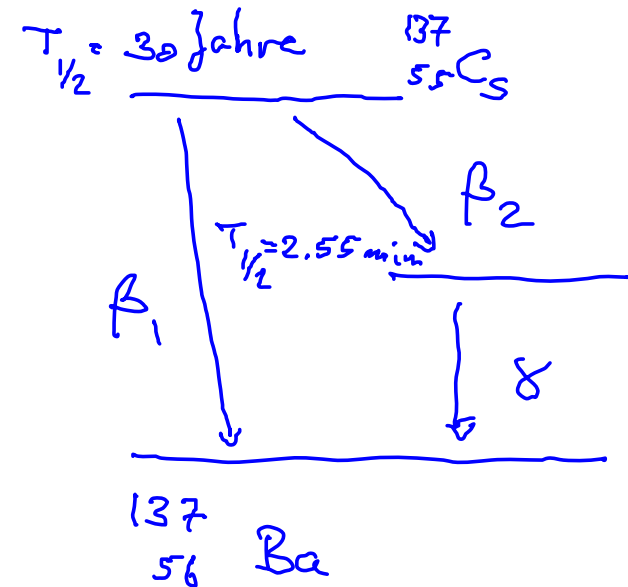
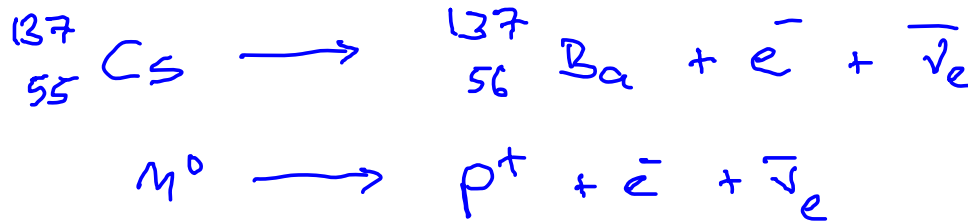
$$m_0c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

# Quelle für hochenergetische Photonen: Gamma-Strahlung

Quelle:



$\beta$  Zerfall:



Elektronenenergie:

$\beta_1 = 1.167 \text{ MeV} \quad 6.5\%$

$\beta_2 = 0.514 \text{ MeV} \quad 93.5\%$

Gamma-Energie:

$\gamma = 0.662 \text{ MeV} \sim 1.6 \cdot 10^{20} \text{ Hz} \sim 1.8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Aktivität:

$1.7 \text{ MBq} = 1.7 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}$

Bq, Becquerel: Anzahl der Zerfälle pro Sekunde

Dosis:

$0.8 \text{ } \mu\text{Sv/h} = 0.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{kg h}} \sim 7 \text{ mS/Jahr}$

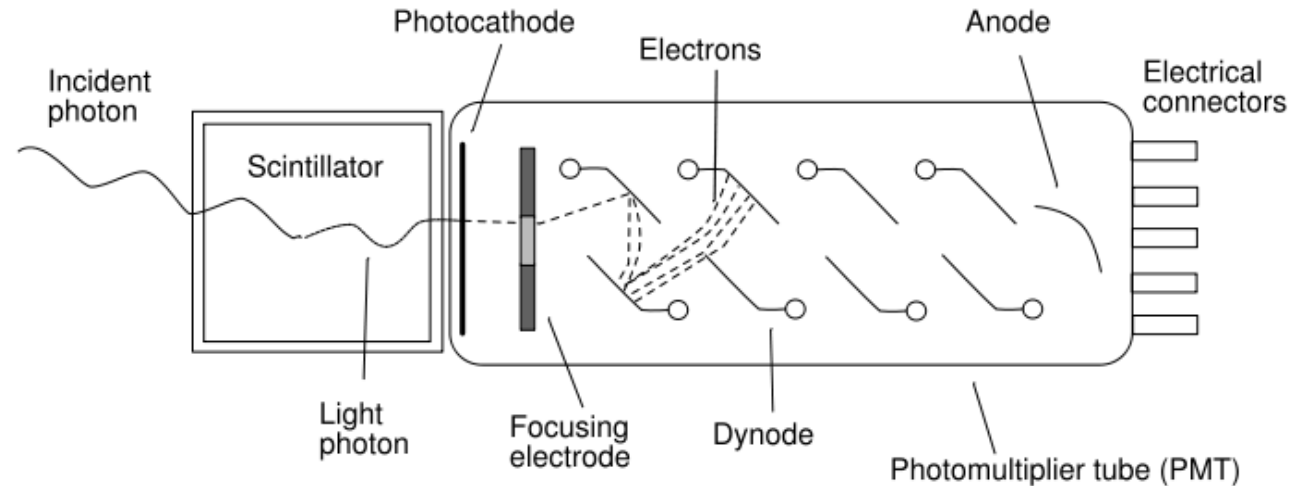
Dosis durch kosmische Strahlung und natürliche Radioaktivität:

$2 \text{ mSv/Jahr}$

Sv, Sievert: Dosisäquivalent

# Detektor für hochenergetische Photonen (Gamma-Strahlung)

Szintillationszähler mit  
Sekundärelektronenvervielfacher:

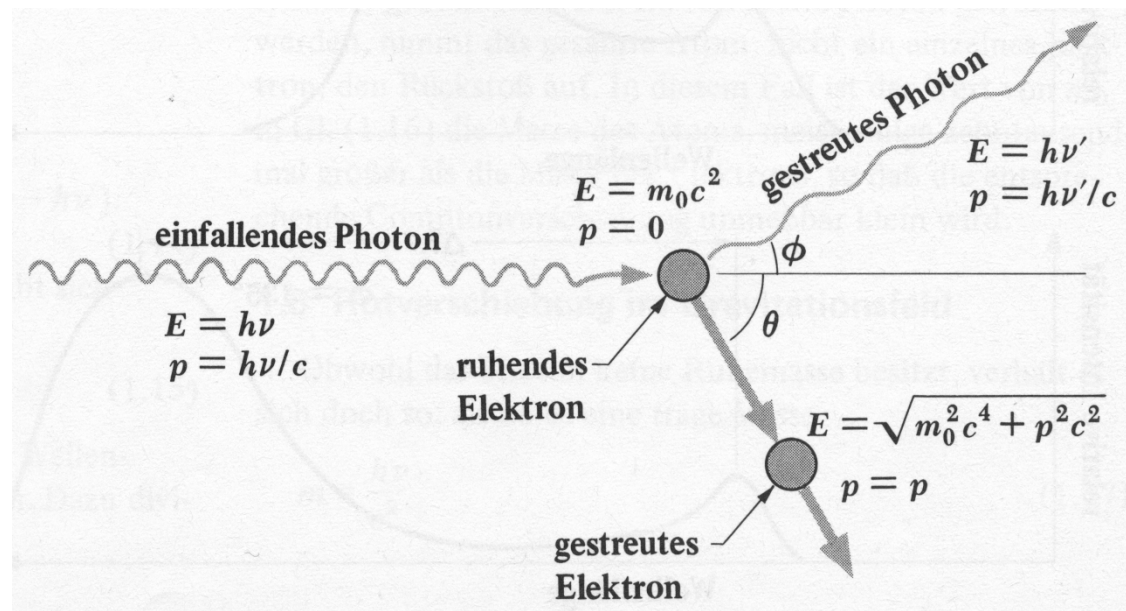


- Ein hochenergetisches einfallendes Photon ( $\sim 1$  MeV) wird im Szintillator in viele niederenergetische Photonen ( $\sim 1$  eV) im sichtbaren Wellenlängenbereich umgewandelt.
- Sichtbare Photonen werden in der Photokathode in Elektronen umgewandelt (photoelektrischer Effekt).
- Elektronen werden im Sekundärelektronenvervielfacher beschleunigt und vervielfacht und in der Anode detektiert und als Strompuls gemessen.
- Die integrierte Ladung in einem Strompuls ist proportional zur Energie des einfallenden Photons.
  - ermöglicht die Messung des Spektrums der gestreuten Photonen



## 1.4.2 Erklärung des Compton-Effekts:

Energie- und Impulserhaltung beim elastischen Stoss zwischen Photon und quasi-freiem Elektron (Bindungsenergie vernachlässigbar)



**Impuls eines Photons:** Im Vakuum breiten sich Photonen mit der Lichtgeschwindigkeit  $c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  aus. Sie verhalten sich wie relativistische Teilchen mit verschwindender Ruhemasse  $m_0 = 0$ .

relativistische Energie eines Teilchens:

$$E_0 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Ruhemasse des Photons:

$$m_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = pc$$

Energie des Photons:

$$E_0 = h\nu$$

Impuls des Photons:

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

# Wellenlängendifferenz $\lambda' - \lambda$ zwischen einfallendem und gestreutem Photon

vorher                  nachher                  nachher

**Energieerhaltung:**

$$\underbrace{h\nu - h\nu'}_{\text{Photon}} = E_{\text{kin}} \quad \text{Elektron} \quad (0)$$

**Impulserhaltung:**

- entlang der Einfallsrichtung

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \phi + p \cos \theta \quad (1)$$

- senkrecht dazu

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \phi - p \sin \theta \quad (2)$$

löse nach Elektronimpuls  $p$ :

$$E_{q.(1)}^2 + E_{q.(2)}^2$$

$$p^2 = \frac{1}{c^2} \left( (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h\nu h\nu' \cos \phi \right) \quad (3)$$

Gesamtenergie des Elektrons  
nach Stoss:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \stackrel{!}{=} E_{\text{kin}} + m_0 c^2 \quad (4)$$

kinetische Energie

Ruheenergie

Gl. (4) und (0):

$$p^2 = \frac{1}{c^2} \left( (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h\nu h\nu' + 2(h\nu - h\nu') m_0 c^2 \right) \quad (5)$$

(3) = (5) ergibt:

$$2h\nu h\nu' (1 - \cos \phi) = 2(h\nu - h\nu') m_0 c^2 \quad (6)$$

mit  $c = \lambda \nu$ :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \phi)$$

**Compton-Wellenlänge**  $\lambda_c$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

unabhängig von Material  
oder  $\lambda$  des Lichts

Verhältnis der gestreuten und einfallenden Photonenergie, berechne  $h\nu'$  aus (6) :

$$\frac{h\nu'}{h\nu} = \left( 1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos \phi) \right)^{-1}$$

Compton-Effekt ist beobachtbar für:

- Photonen ausreichend hoher Energie (ansonsten nur kleiner relativer Wellenlängenunterschied)
- kleine  $e^-$  Bindungsenergie



Nobelpreis in Physik (1927)

"for his discovery of the effect named after him"

Die Beobachtung des Compton-Effekts weist deutlich nach, dass Photonen einen Impuls besitzen, und bestätigt so ebenfalls, dass Licht Teilchencharakter hat.

## **Literatur zum Compton-Effekt:**

Kaenzig: Abschnitt 1.5

Beiser: Abschnitt 2.7

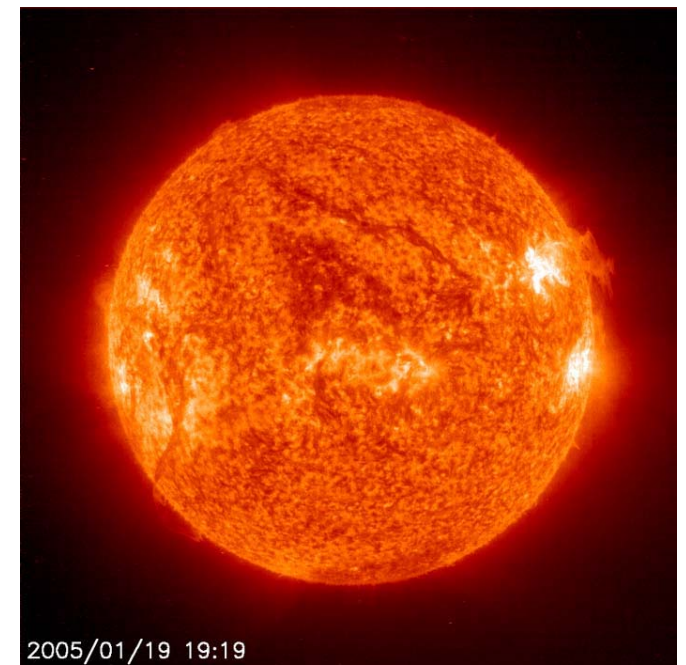
Haken&Wolf: Abschnitt 5.4

## 1.5 Schwarze Strahler, Temperaturstrahlung

- Alle Körper bei endlicher Temperatur erzeugen elektromagnetische Strahlung (Temperaturstrahlung)
- Frequenzverteilung (Spektrum) des Lichts ist abhängig von der Temperatur  $T$ 
  - sichtbares Licht bei hohen Temperaturen ( $T > 1000\text{ K}$ )
  - infrarotes Licht bei  $T < 1000\text{ K}$
  - Mikro- und Radiowellen bei  $T < 10\text{ K}$
- Das Spektrum ist kontinuierlich und lässt sich nicht mit Mitteln der klassischen Physik erklären.
- Die Quantisierung der elektromagnetischen Strahlung in Form von Photonen der Energie  $h\nu$  ist nötig zur Erklärung (Planck, 1900)

### Die Sonne: ein schwarzer Strahler

- Temperatur  $T \sim 6000\text{ Kelvin}$
- Strahlungsleistung  $\sim 100 \cdot 10^9\text{ GW}$
- Intensität auf der Erdoberfläche  $1\text{ kW/m}^2$
- Kernfusion ( $\text{H}_2 \rightarrow \text{He}$ )

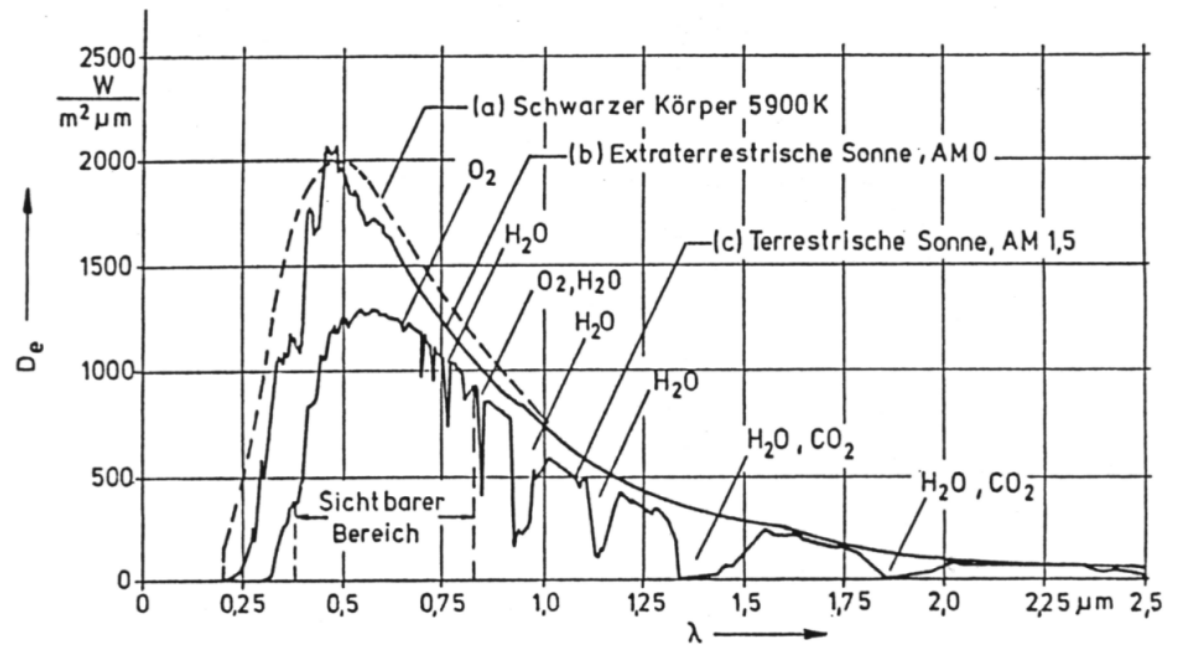


**Die Sonne**



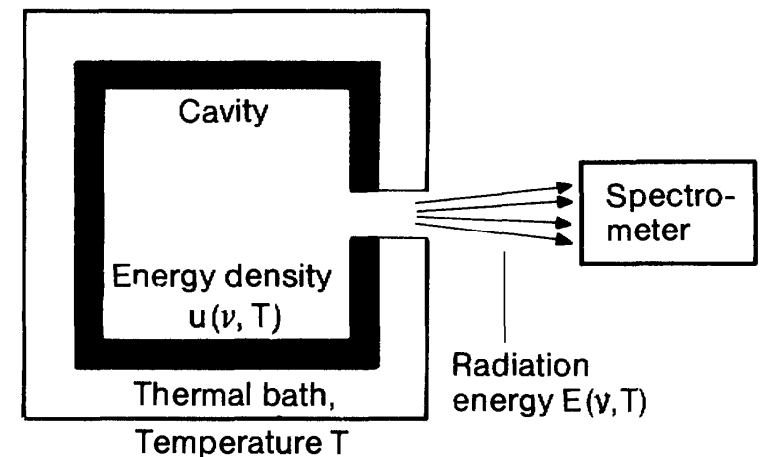
Untergang eines schwarzen Strahlers in Zürich

- Spektrum der Sonne:
  - kontinuierlich
  - grösste Intensität im sichtbaren Wellenlängenbereich
- Vorlesungsexperiment: Messung des Spektrums einer Bogenlampe



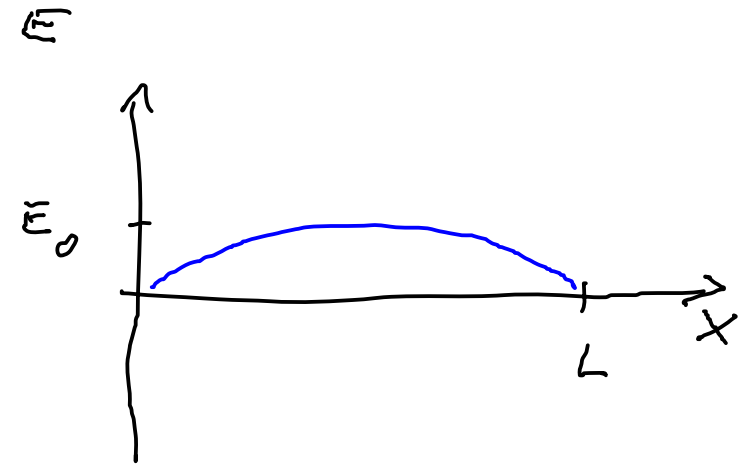
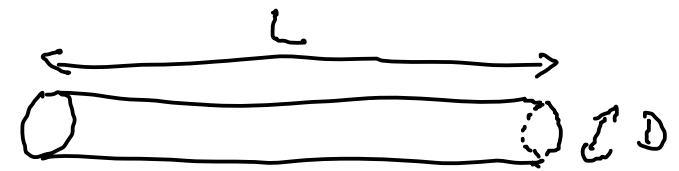
### Berechnung des Spektrums eines schwarzen Strahlers

- Betrachte eine Quelle thermischer Strahlung als einen mit Photonen gefüllten Hohlraum mit der Kantenlänge  $L$  und dem Volumen  $V = L^3$  bei der Temperatur  $T$ .
- Die Wände des Hohlraums emittieren und absorbieren Strahlung mit gleicher Rate und sind im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung im Inneren des Hohlraums (Vorlesungsexperiment).
- Die Energiedichte  $u(\nu)$  im Inneren des Körpers kann durch eine kleine Öffnung, die das thermische Gleichgewicht nicht beeinflusst, bestimmt werden.
- Definition Energiedichte  $u(\nu)$ : Strahlungsenergie im Frequenzbereich  $\nu \dots \nu + d\nu$  pro Volumen  $V$



## 1.5.1 Der 1D schwarze Strahler:

- Objekt der Länge  $L$  und Durchmesser  $D \ll L$  bei fester Temperatur  $T$ .
- Beispiel für einen realen 1D schwarzen Strahler: ein Koaxialkabel oder Hohlleiter bei ausreichend niedrigen Temperaturen
- Elektromagnetische Energie ist in Form von stehenden elektromagnetischen Wellen in diesem Objekt gespeichert.
- **Frage:** Wieviel elektromagnetische Energie  $U$  ist in einem solchen Objekt bei Temperatur  $T$  gespeichert?



### Vorgehensweise:

- a. Bestimme die Energie  $U$ , die in einer einzelnen stehenden Welle (einer Mode) bei fester Wellenlänge  $\lambda$  oder Frequenz  $\nu$  gespeichert ist.
- b. Bestimme die Anzahl der möglichen stehenden Wellen (Moden) in Abhängigkeit von der Frequenz.
- c. Bestimme die Gesamtenergie der im Objekt gespeicherten elektromagnetischen Strahlung durch Aufsummieren der Energie der einzelnen Moden.

## (a) Energie einer stehenden elektromagnetischen Welle:

- klassische Energiedichte:

$$w = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B) = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 B^2$$

- Energie ist gleichverteilt zwischen elektrischem Feld  $E$  und magnetischem Feld  $B$ .
- Die Energie einer Mode ist proportional zur Feldamplitude ( $E_0, B_0$ ), kann also beliebige Werte annehmen.

- statistische Physik: Die mittlere Energie einer Mode beträgt im thermischen Gleichgewicht nach dem Gleichverteilungssatz  $k_B T / 2$  pro Freiheitsgrad.  
→ Rayleigh-Jeans Gesetz
- Quantenmechanik: Die Energie einer Mode ist in Photonen der Energie  $h\nu$  quantisiert. Die Anzahl der Photonen in einer Mode wird durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion  $f_{BE}$  bestimmt.  
→ Plancksches Strahlungsgesetz

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$



## (b) Anzahl der Moden und Modendichte in 1D:

- Resonanzbedingung:

$$j \frac{\lambda_j}{2} = L \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

- Modenindex  $j$ :

$$j = \frac{2L}{\lambda_j} = \frac{2L}{c} \nu_j$$

- niedrigste mögliche Frequenz

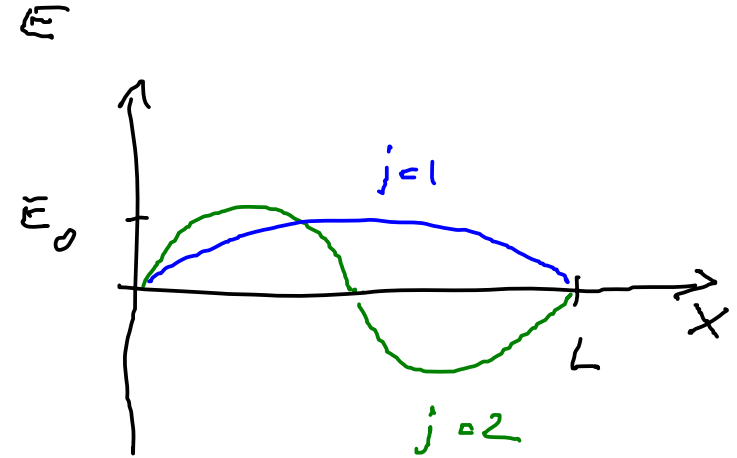
$$\nu_1 = \frac{c}{2L}$$

- Anzahl  $J$  der Moden bis zur Frequenz  $\nu$ :

$$J = \frac{2L}{c} \nu = \frac{\nu}{\nu_1}$$

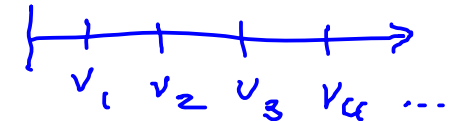
- Spektrale Modendichte  $g(\nu)$ : Anzahl Moden  $dJ$  pro Frequenzintervall  $d\nu$

$$g(\nu) = \frac{dJ}{d\nu} = \frac{2L}{c} = \text{const.}$$



Moden sind gleichverteilt in der Frequenz

$$\nu = j \frac{c}{2L} = j \nu_1$$

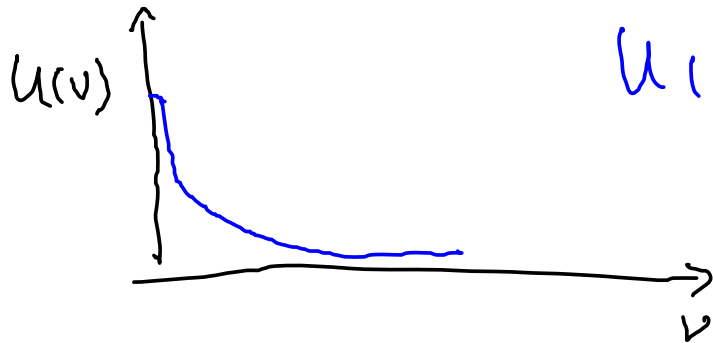


- (c) Energie  $U(\nu)$  im Frequenzintervall  $d\nu$  in statistischer Näherung (**Rayleigh-Jeans**):

$$U(\nu) d\nu = k_B T d\zeta = k_B T \frac{2L}{c} d\nu$$

- die Energie des 1D schwarzen Strahlers ist in dieser Näherung in der Frequenz gleichverteilt
- sie ist proportional zur Temperatur  $T$  (gilt nur für  $h\nu < k_B T$ )

- Energie  $U(\nu)$  im Frequenzintervall  $d\nu$  nach **Planck**:



$$U(\nu) d\nu = h\nu f_{BE} d\zeta$$

$$= h\nu \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \frac{2L}{c} d\nu$$

für niedrige Frequenzen  $h\nu < k_B T$

$$\sim h\nu \frac{1}{\left(1 + \frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \frac{2L}{c} d\nu = k_B T \frac{2L}{c} d\nu$$

für hohe Frequenzen  $h\nu > k_B T$

$$\sim h\nu e^{-h\nu/k_B T} \frac{2L}{c} d\nu$$

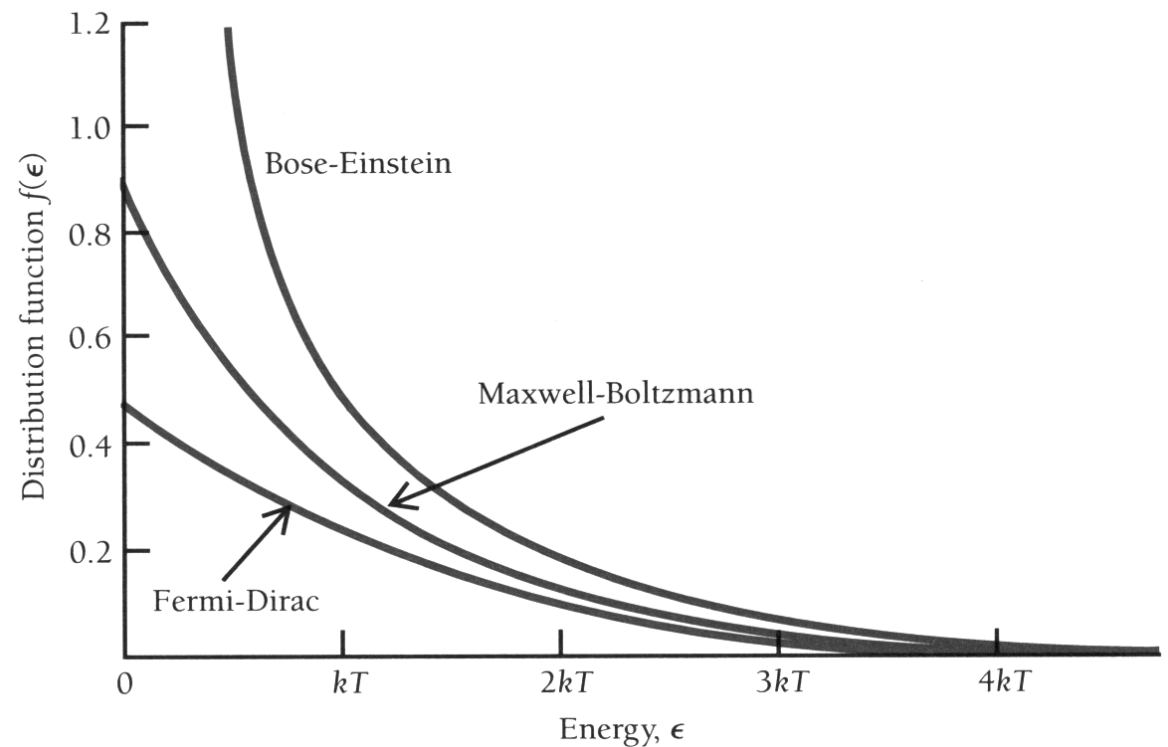
- Energiedichte  $u(\nu)$  (1D, pro Länge  $L$ ):

$$u(\nu) d\nu = \frac{U(\nu)}{L} d\nu$$

## 1.5.2 Quantenmechanische Energie und Besetzung der Moden

- Plancksche Hypothese: Die in jeder Mode gespeicherte Energie  $E = n h \nu$  ist in Einheiten der Photonenergie  $h \nu$  quantisiert.
- $n$  ist die Anzahl der Photonen in einer Mode (vgl. quantenmechanischer harmonischer Oszillator, siehe spätere Vorlesung).
- Die Besetzung der verschiedenen zur Verfügung stehenden Moden des Hohlraums mit Photonen wird durch die Bose-Einstein Verteilungsfunktion  $f_{BE}$  beschrieben.

$$f_{BE}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$



$$\epsilon = \frac{h\nu}{kT}$$

### 1.5.3 Berechnung der Energiedichte für einen 3D schwarzen Strahler:

- Die Wände eines kubischen Hohlraums mit Volumen  $L^3$  und Kantenlänge  $L$  seien perfekte Reflektoren.
- Dann muss die elektromagnetische Strahlung im Hohlraum stehende Wellen bilden.

- Resonanzbedingung entlang der Koordinate  $i$ .

$$j_i \frac{\lambda_i}{2} = L_i \quad i = x, y, z$$

$$j_i = 1, 2, 3, \dots$$

- Modenindex  $j_i$  zur Richtung  $i = x, y, z$

$$j_i = \frac{2L_i}{\lambda_i} = \frac{2L_i}{c} \nu_i$$

- Für eine stehende Welle der Wellenlänge  $\lambda$  entlang einer beliebigen Richtung gilt (Resonanzbedingung)

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda_i}\right)^2 = \left(\frac{2L}{c} \nu_i\right)^2$$

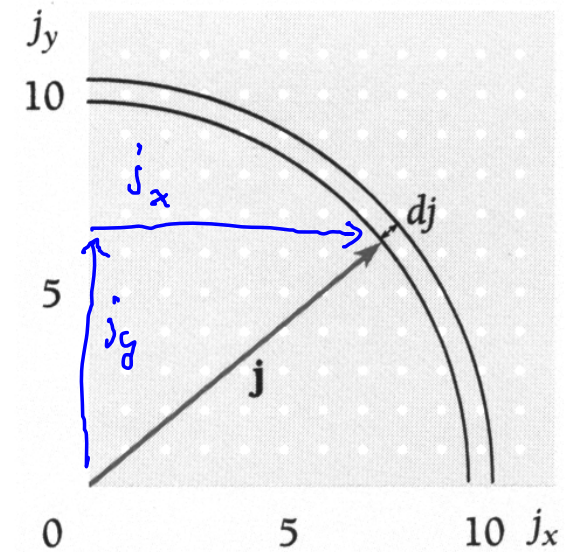
mit  $j_x, j_y, j_z \in [1, 2, 3, \dots]$

- Anzahl  $J$  der Moden mit Wellenlänge kleiner als  $\lambda_j$  (Frequenz grösser als  $\nu_j$ )

$$J = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi}{3} j^3 = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{c^3} \nu^3$$

positive  $j_i$

2 Polarisierungen



- Zahl der Moden  $g(\nu)$  pro Frequenzintervall  $d\nu$ :

$$g(\nu) = \frac{dJ}{d\nu} = 8\pi \frac{L^3}{c^3} \nu^2$$

- Modendichte  $G(\nu)$  (Zahl der Moden pro Volumen  $V = L^3$ ) pro Frequenzintervall  $d\nu$ :

$$G(\nu) = \frac{g(\nu)}{L^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

- quadratische Abhängigkeit von der Frequenz  $\nu$
- unabhängig von der Form des Hohlraums

### 1.5.4 Rayleigh-Jeans Gesetz

Berechnung des Spektrums unter Annahmen der **klassischen Physik**: Jede Mode hat zwei Freiheitsgrade, die wie ein harmonischer Oszillator beschrieben werden können.

Gleichverteilungssatz: Im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  trägt jede Mode die Energie  $k_B T$  zur Gesamtenergie eines Systems bei.

Energiedichte  $u(\nu)$  der elektromagnetischen Strahlung im Hohlraum pro Frequenzintervall  $d\nu$ :

$$u(\nu) = kT G(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} kT$$

Dieses nach Rayleigh-Jeans benannte Gesetz für die Energiedichte eines schwarzen Strahlers ist nur für Frequenzen  $h\nu$ , die klein sind gegenüber der Temperatur  $kT$ , gültig.

$u(\nu)$  divergiert für grosse Frequenzen  $\nu$  (Ultraviolett katastrophe) und muss daher falsch sein. Dieses Problem kann nur mit Hilfe der Quantenmechanik gelöst werden.

## 1.5.5 Plancksches Strahlungsgesetz:

- Die Gesamtenergiedichte  $u(\nu)$  pro Frequenzintervall  $d\nu$  ergibt sich dann zu:

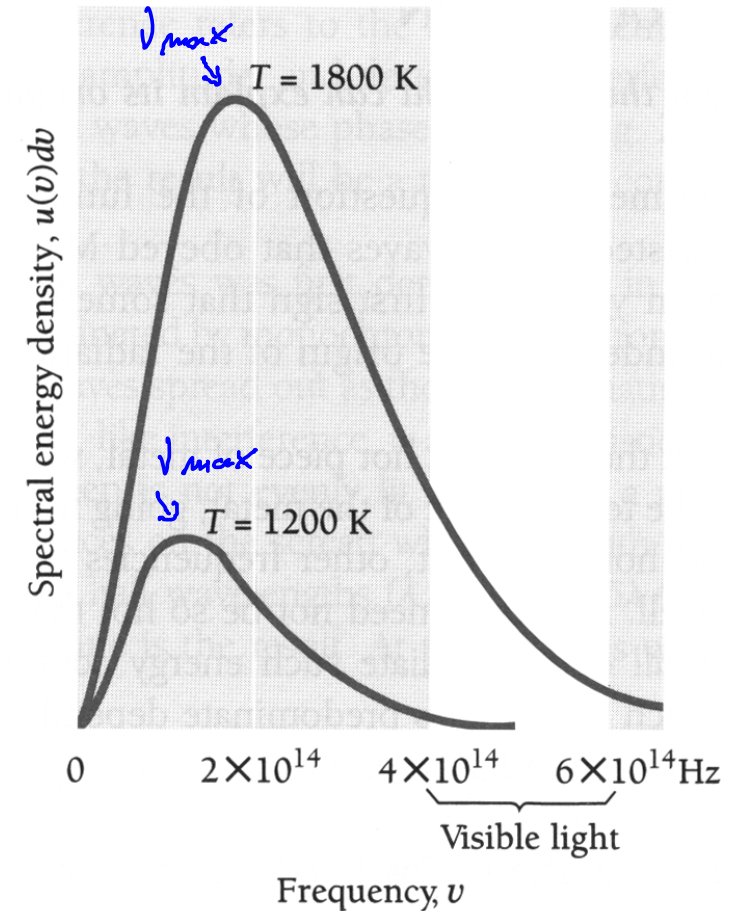
$$u(\nu) = h\nu G(\nu) f_{BE}(\nu) \\ = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Dies ist das **Plancksche Strahlungsgesetz**. Es beschreibt das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung eines jeden Körpers (Sonne, Glühlampen, ...) im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$ .

Eine weitere Herleitung dieses Gesetzes (nach Einstein) wird im Zusammenhang mit dem Laser diskutiert.

### Charakteristische Eigenschaften des Spektrums:

- temperaturabhängiges Maximum der Energiedichte bei  $\nu_{max}$
- Anstieg von  $u(\nu)$  proportional zu  $\nu^2$  bei niedrigen Frequenzen  $\nu < \nu_{max}$
- exponentieller Abfall von  $u(\nu)$  mit  $e^{-\nu}$  bei hohen Frequenzen  $\nu > \nu_{max}$
- temperaturabhängiges Maximum der Energiedichte bei  $\nu_{max}$
- Gesamtenergie integriert über alle Frequenzen skaliert mit  $T^4$



## 1.5.6 Das Wiensche Verschiebungsgesetz:

- Bestimme die Wellenlänge bei der ein schwarzer Strahler ein Maximum an Energie abstrahlt.
  - drücke das Strahlungsgesetz in der Wellenlänge  $\lambda$  aus
  - finde Maximum

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_{max}$$

### Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4.965 k} = 2.9 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

- Maximum der Strahlungsemission verschiebt sich mit steigender Temperatur  $T$  zu niedrigeren Wellenlängen  $\lambda_{max}$ .
- Schwarze Strahler bei einigen 1000 Grad emittieren im sichtbaren Wellenlängenbereich, während Körper bei Raumtemperatur vorwiegend im Infraroten emittieren.

- Beispiel: Sonne

$$T = 6000 \text{ K}$$

$$\lambda_{max} = 480 \text{ nm}$$

- Anwendung Pyrometrie: Bestimmung der Temperatur eines Objekts aus Messung des Strahlungsspektrums

## 1.5.7 Stefan-Boltzmann Gesetz

Bestimme die gesamte Energiedichte eines schwarzen Strahlers bei Temperatur  $T$

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = a T^4$$

- mit der universellen Konstanten  $a$
- starke Abhängigkeit von der Temperatur  $T$

Die von einem Objekt pro Zeiteinheit und Oberfläche abgestrahlte Energie  $R$  ist proportional zu  $T^4$ . Diese Abhängigkeit wird **Stefan-Boltzmann Gesetz** genannt.

$$R = e \sigma T^4$$

mit der Stefan Konstanten  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{ac}{4} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

und dem Emissionskoeffizienten  $e$  des Strahlers, der von  $e = 0.07$  für polierten Edelstahl bis zu  $e = 0.97$  für matte schwarze Oberflächen variiert.

Vorlesungsexperiment: Leslie-Würfel



## 1.5.8 Energiedichte $u(\nu) d\nu$ und Strahlungsflussdichte $P(\nu) d\nu$

- Definition: Energiedichte  $u(\nu) d\nu$

$u(\nu) d\nu =$  Strahlungsenergie im Frequenzbereich  $\nu \dots \nu + d\nu$  pro Volumen  $V$

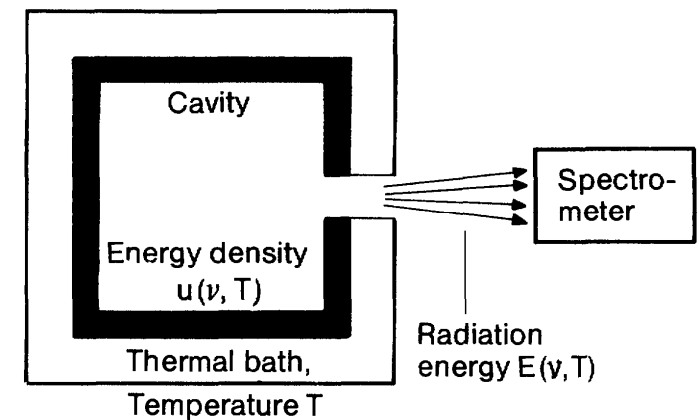
- Definition: spektrale Energiedichte  $u(\nu)$ :

$u(\nu) =$  Strahlungsenergie pro Volumen  $V$  und pro Frequenzintervall  $d\nu$

- Messgröße: Strahlungsflussdichte  $P(\nu)$

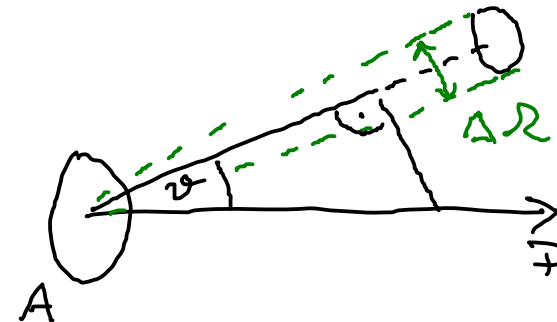
$P(\nu) d\nu =$  Strahlungsleistung im Frequenzbereich  $\nu \dots \nu + d\nu$  pro Raumwinkel und pro Fläche

Energie  $E$  die von einem schwarzen Strahler mit Fläche  $A$  pro Zeitintervall  $\Delta t$  in ein Raumwinkelelement  $\Delta\Omega$  unter einem Winkel  $\theta$  zur Flächennormalen emittiert wird.



$$E(\nu) d\Omega = u(T, \nu) d\nu \quad c \Delta t \quad A \cos \theta \quad \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

$$P(\nu) d\Omega = \frac{E(\nu) d\Omega}{\Delta t}$$



## **Literatur zur thermischen Strahlung:**

Kaenzig: Abschnitt 1.1

Beiser: Abschnitt 2.2

Haken&Wolf: Abschnitt 5.2