Der 3-Dimensionale schwarze Strahler

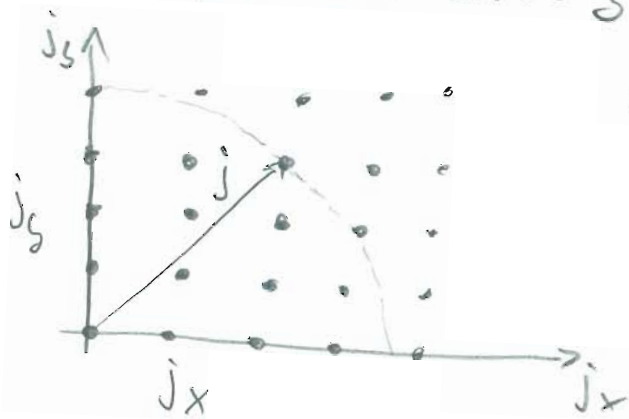
- es reicht aus die spektrale Modendichte im 3 Dimensionen zu berechnen. Alle weiteren Schritte sind analog zum 1D Fall.

① Resonanzbedingung für alle 3 Raumrichtungen

$$j_i \frac{\lambda}{2} = L_i \qquad \text{für } i = x, y, z$$

$$\Rightarrow j_i = \frac{2L_i}{\lambda} = \frac{2\nu}{c} L_i \qquad \text{mit } j = 1, 2, 3, \ldots \quad \Delta j = 1$$

- 2D Beispiel zur Berechnung der Modenzahl



$\rightarrow$ Abzählen der möglichen Moden.

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$$

- im 3D

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\nu}{c} L\right)^2$$

- Zahl der Moden

$$G(\nu) = 2 \cdot \frac{1}{8} \underbrace{\frac{4\pi}{3} j^3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \nu^3$$

2 Polarisations-freiheitsgrade

$j > 0$

Volumen einer Kugel mit Radius j

Spektrale Modendichte

$$g(\nu) = \frac{\partial G}{\partial \nu} = 8\pi \frac{L^3}{c^3} \nu^2$$

- pro Volumen

$$\boxed{\frac{g(\nu)}{L^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2}$$

- **Planck'sches Strahlungsgesetz:** 3D

$$\boxed{u(\nu)} = h\nu \frac{g(\nu)}{L^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$= \boxed{\frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

- **Rayleigh-Jeans Gesetz** $(h\nu \ll k_B T)$

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T}$$

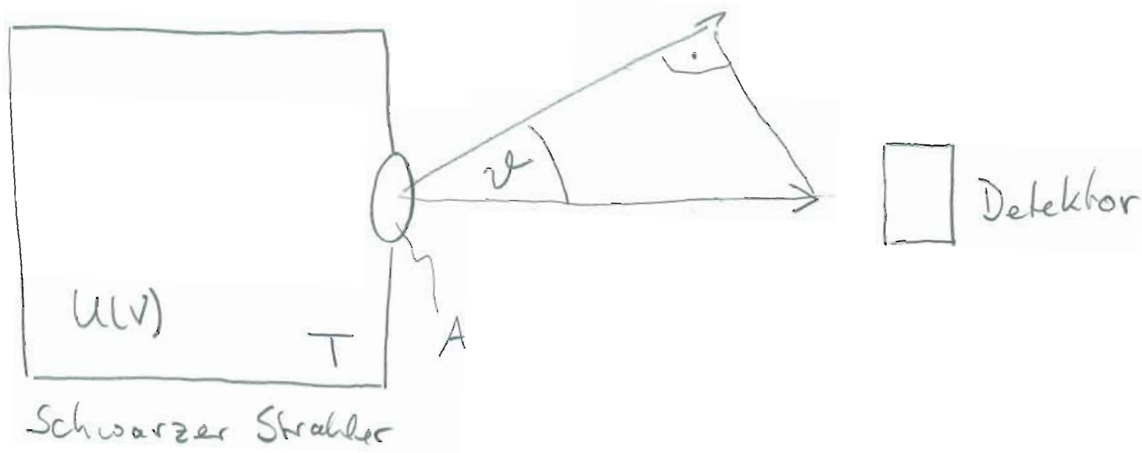
- **Wien'sches Gesetz**

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}$$

- **Stefan-Boltzmann Gesetz**

$$\boxed{u = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} T^4} = a T^4$$

Emittierte Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers



- bisher: Energiedichte des elektromagnetischen Feldes in einem schwarzen Strahler

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1}}$$

spektrale Energiedichte

- Bestimme die von Fläche A unter dem Winkel ϑ zur Normalen der Fläche ausgesandte Energie im Frequenzintervall $d\nu$ pro Zeitintervall dt

$$E(\nu)\,d\nu = u(\nu)\,d\nu\,A\,c\,dt\,\underbrace{\cos\vartheta}$$

nur die zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Komponente der Fläche A ist relevant.

- Strahlungsleistung

$$P(\nu)\,d\nu = \frac{d\,E(\nu)}{dt}\,d\nu$$

- Strahlungsintensität auf der Oberfläche A

$$I(\nu)\,d\nu = \frac{P(\nu)}{A}\,d\nu = u(\nu)\,c\,d\nu\,\cos\vartheta$$

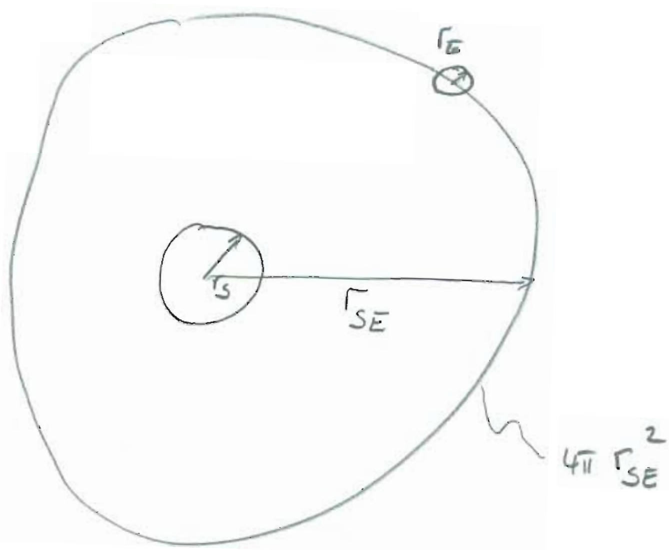
Beispiel: • Gesamte von einem kugelsymmetrischen Schwarzen Strahler mit Radius r_S und Temperatur T ausgesandte Strahlungsleistung (z.B. die Sonne)

$$P = \int P(\nu)\, d\nu$$

$$= \int u(\nu)\, c\, A\, d\nu$$

Faktor aus $\cos\vartheta$ Winkelabhängigkeit

$$= \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} T^4 \, c \; 4\pi r_S^2 * \frac{1}{4}$$



• Intensität auf der Erde

$$\boxed{I = \frac{P}{4\pi r_{SE}^2} = \frac{a c}{4} T^4 \frac{r_S^2}{r_{SE}^2}}$$

- emittierte Leistung:

$$P = \varepsilon \sigma T^4$$

mit $\sigma = \frac{ac}{4} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

und ε : Emissivität

$\varepsilon = 0.07$ für Edelstahl

$\varepsilon = 0.97$ matte schwarze Oberflächen

Das Wiensche Verschiebungsgesetz

- bestimmt die Wellenlänge λ_{max} bei der das Maximum der thermischen Strahlung emittiert wird.

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_{max}$$

$$\boxed{\lambda_{max} T = \frac{hc}{4.965\, k_B}} = 2.9\ 10^{-3}\ m\,K$$