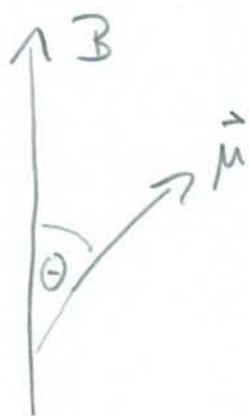


# Der Zeemann-Effekt

- betrachte die Wechselwirkung des mit dem Bahndrehimpuls des Elektrons verknüpften magnetischen Moments  $\vec{\mu}$  mit einem homogenem Magnetfeld  $\vec{B}$



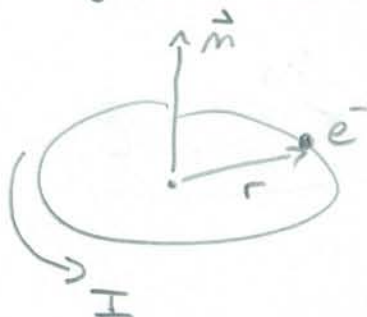
Potentielle Energie:

$$\boxed{U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}$$
$$= -\mu B \cos \theta$$

$$U_{\min} = -\mu B \quad \text{für } \theta = 0$$

$$U_{\max} = \mu B \quad \text{für } \theta = \pi$$

- magnetisches Moment  $\vec{\mu}$  eines  $e^-$  auf Kreisbahn



$$\vec{\mu} = \underline{I} A \vec{m}$$
$$= e f \pi r^2 \vec{m}$$

mit  $f = \frac{1}{T}$  Bahnfrequenz

- Zusammenhang mit Bahndrehimpuls  $\vec{l}$  des Elektrons

$$\vec{l} = m v r \vec{m} = 2\pi m f r^2 \vec{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{l}}$$

- gyromagnetisches Verhältnis (g-Faktor)

$$g = \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{l}|} = -\frac{e}{2m}$$

- potentielle Energie ausgedrückt im Drehimpuls  $\vec{l}$

$$U = \frac{e}{2m} \vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} |\vec{B}| |\vec{l}| \cos \Theta$$

mit  $\Theta$ , dem Winkel zw.  $\vec{B}$  und  $\vec{l}$

- quantenmechanisch gilt für die Erwartungswerte

$$|\vec{l}| \cos \Theta = l_z = m_l \hbar$$

eines Elektrons mit Bahndrehimpuls  $|\vec{l}|$  und magnetischer Quantenzahl  $m_l$

- es folgt für die potentielle Energie des bahnmagnetischen Moments im Wasserstoff-Atom

$$U = m_l \frac{e \hbar}{2m} B = m_l \mu_B B$$

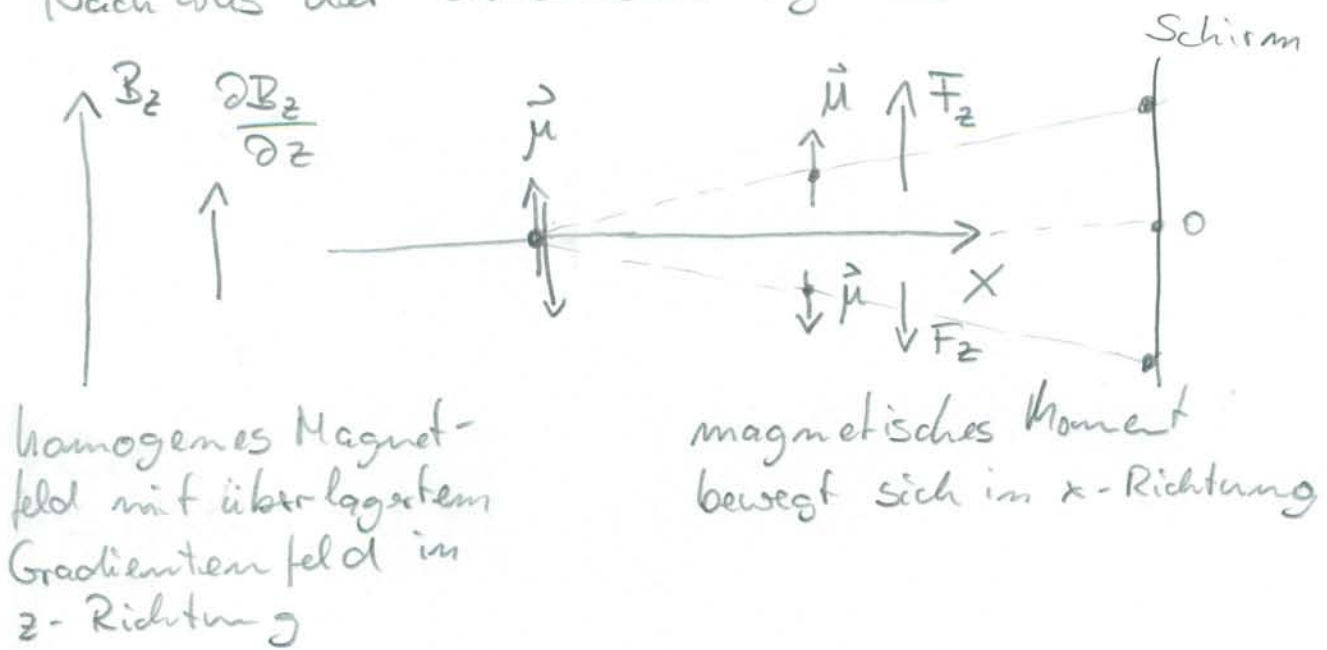
mit 
$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m} = 9.27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Bohr-Magneton

Zeige Folie zum Zeeman-Effekt.

# Stern - Gerlach Experiment

Nachweis der Quantisierung des Elektron-Spins



- betrachte Atom in dem ein einziges  $e^-$  zum magnetischen Moment beiträgt, d.h. kein Bahnmagnetisches Moment ( $l=0$ ).

→ Beispiel: Ag (Silber)

- Kraft auf Ag-Atom

$$F_z = - \frac{\partial U_m}{\partial z}$$

$$= \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$= -g_s \frac{e}{2m} m_s \hbar \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$\uparrow$   
 $\pm \frac{1}{2}$

mit  $U_m$  potentielle Energie des magnetischen Moments im Magnetfeld

$$U_m = -\mu_z B_z$$

# Die Schrödinger-Gleichung für den Elektron-Spin ①

- ① Hamiltonian eines magnetischen Moments in einem externen Magnetfeld

$$H = - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = - (\mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z) \quad \left| \begin{array}{l} \uparrow \vec{B} \\ \nearrow \vec{\mu} \end{array} \right.$$
$$= - \mu_z B_z \quad \text{für } \vec{B} = (0, 0, B_z)$$

- ② für das magnetische Moment eines Elektrons

$$\hat{H} = - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \vec{\mu} = -g_s \frac{e}{2m} \vec{S}$$
$$= + g_s \frac{e}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} = + g_s \frac{e}{2m} (S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z)$$
$$= + g_s \frac{e}{2m} S_z B_z \quad \text{für } \vec{B} = (0, 0, B_z)$$

- ③ der quantenmechanische Hamilton Operator

$$\hat{H} = + g_s \frac{e}{2m} B_z \hat{S}_z \quad \text{mit } \langle \hat{S}_z \rangle = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

- $\hat{H} \psi = E \psi$  mit  $\hat{H}$  wie zuvor
- finde Operator  $\hat{S}_z$  für Eigendrehimpuls

# Die Spin-Operatoren

(2)

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{Z}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{X}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{Y}$$

Pauli-Matrizen

• Eigenvektoren und Eigenwerte von  $\hat{S}_z$

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

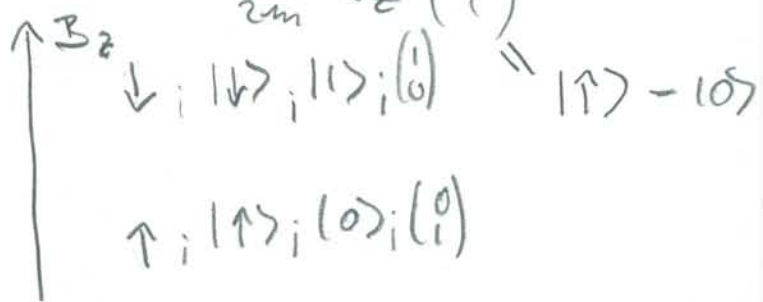
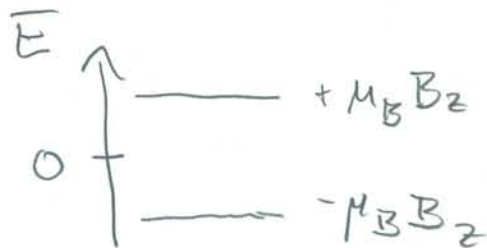
$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{\hbar}{2}}_{\text{Eigenwert}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Eigenvektor}}$$

$$m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

• zugehörige Energien im Magnetfeld

$$\hat{H} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + g_s \frac{e}{2m} B_z \hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + g_s \frac{e}{2m} B_z \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx + \frac{e\hbar}{2m} B_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = |1\rangle$$

$$\hat{H} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = + g_s \frac{e}{2m} B_z \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - g_s \frac{e}{2m} B_z \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx - \frac{e\hbar}{2m} B_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





# Notation für Eigenvektoren: von $\hat{S}_z$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle = |+\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle = |0\rangle = |-\rangle$$

Die Leiteroperatoren

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

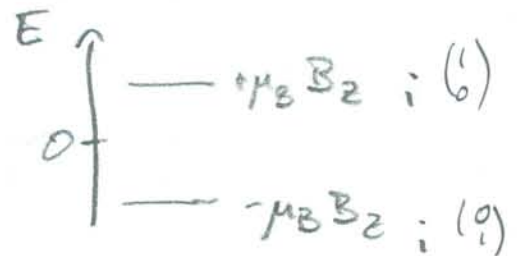
$$\hat{S}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Erzeuger



Orthogonalität der Eigenvektore zu verschiedenen Eigenwerten

$$\langle \uparrow | \downarrow \rangle = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \langle \downarrow | \uparrow \rangle$$

$$\langle \uparrow | \uparrow \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = \langle \downarrow | \downarrow \rangle$$

$$\langle \uparrow | = | \downarrow \rangle^\dagger = (| \downarrow \rangle^\dagger)^*$$

# Weitere Eigenschaften der Eigendrehimpulsoperatoren (4)

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betragquadrat des  
Eigendrehimpuls

mit  $\hat{S}_x^2 = \hat{S}_y^2 = \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} \mathbb{I}$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Eigenvektoren und Eigenwerte

$$\hat{S}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\hbar \sqrt{3}}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\hbar \sqrt{3}}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\hbar^2 s(s+1)$  mit  $s = \frac{1}{2}$

- Kommutationsrelationen des Eigendrehimpuls

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = -i\hbar \hat{S}_z \quad \text{und zyklisch}$$

keine gleichzeitigen Eigenvektoren

↳ nicht gleichzeitig  
beliebig genau bestimmbar

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0$$

gleichzeitige  
Eigenvektoren

- Erwartungswerte

$$\langle \uparrow | \hat{S}_z | \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\text{tr}} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} = -\frac{\hbar}{2}$$