Physik IV 2010 - Übung 9

14. Mai 2010

1. **Harmonischer Oszillator und Grundzustandsenergie** $\sum 3$

   (a) Der Grundzustand der Wellenfunktion eines harmonischen Oszillators (Potential $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$) ist durch

   $$\psi_0(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung darstellt und berechnen Sie sowohl die Normierungskonstante C als auch die Grundzustandsenergie E_0. [1]

   (b) Berechnen Sie die quantenmechanische Unschärfe des Orts Δx und des Impulses Δp im Grundzustand und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Heisenberg'schen Unschärferelation. [1]

   (c) Ein Pendel mit einer Masse von 1 g am Ende eines masselosen Fadens der Länge 250 mm oszilliert mit einer Frequenz von $\omega = \sqrt{g/l}$. Wie gross ist die quantenmechanische Grundzustandsenergie? Wie leicht können diese Oszillationen detektiert werden? [$\frac{1}{2}$]

   (d) Das Pendel schwingt mit einer kleinen Amplitude, bei der sich die Masse maximal 1 mm oberhalb seiner Gleichgewichtsposition befindet. Wie lautet die entsprechende Quantenzahl? [$\frac{1}{2}$]

2. **Harmonischer Oszillator II.** $\sum 3$

   (a) Der Vernichtungsoperator eines harmonischen Oszillators der Masse m und Kreisfrequenz ω mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ist durch

   $$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass die Relation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ gilt. [1]

(b) Berechnen Sie durch Anwendung des Erzeugungsoperators ausgehend vom Grundzustand

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

den ersten angeregten Zustand $\psi_1(x)$. [1]

(c) Wie lautet der Erwartungswert der Energie $\hat{O} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ mit dem Teilchenzahloperator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ für den Zustand $\psi_1(x)$? $[\frac{1}{2}]$

(d) Ein harmonische Oszillator mit einer Frequenz von $\nu = \omega/(2\pi) =$ 10 GHz befinde sich im Superpositionszustand $\psi(x, t_0) = (2\psi_0(x) + \psi_1(x))/\sqrt{5}$. Geben Sie einen Ausdruck für die Zeitentwicklung $\psi(x, t)$ des Systems an und berechnen Sie, nach welcher Zeit das System wieder in den Anfangszustand $\psi(x, t_0)$ zurückkehrt. $[\frac{1}{2}]$

3. **Das Wasserstoffatom.** $\sum 2$

(a) Wie ändert sich (unter Vernachlässigung der Spin-Bahn Kopplung) die Gesamtenergie des Elektrons im freien Wasserstoffatom in Abhängigkeit von l und m_l für fixes n? Geben Sie die möglichen Werte von l und m_l an. Welche Bedeutung haben n, l und m_l? $[\frac{1}{2}]$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Gesamtenergie

$$\langle E \rangle = \left\langle -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \right\rangle$$

des $1s$ und des $2p$ Zustandes und ermitteln Sie die Übergangsfrequenz zwischen diesen beiden Zuständen. Verwenden Sie dazu die Wellenfunktion $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ mit

$$\begin{aligned}
Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & R_{1,0} &= 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0} \\
Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta & R_{2,0} &= 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} \\
Y_{1,\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} & R_{2,1} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}.
\end{aligned}$$

sowie die Formel $[1\frac{1}{2}]$

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = n!/a^{n+1}.$$

4. **Bahndrehimpuls im Wasserstoffatom** $\sum 2$

(a) Berechnen Sie den Bahndrehimpuls $|\vec{L}|$ eines Elektrons im Wasserstoffatom für Zustände mit $l = 3$ und skizzieren Sie die möglichen magnetische Quantenzahlen in einem Vektordiagramm. [1]

(b) Ähnlich zu den Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators lassen sich auch Drehimpuls-Leiteroperatoren durch $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ definieren. Leiten Sie die Kommutatorrelation $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$ her und benutzen Sie diese, um die Gültigkeit der folgenden Gleichung zu zeigen: $[\frac{1}{2}]$

$$\hat{L}_z\hat{L}_\pm = \hat{L}_\pm\hat{L}_z \pm \hbar\hat{L}_\pm.$$

(c) Nehmen Sie an, dass ϕ_{m_l} ein Eigenzustand zum Operator $\hat{L}_z$ mit Eigenwert $\hbar m_l$ ist. Benützen Sie die obigen Gleichungen um zu zeigen, dass die Zustände $\hat{L}_\pm\phi_{m_l}$ Eigenzustände von $\hat{L}_z$ zum Eigenwert $\hbar(m_l \pm 1)$ sind. $[\frac{1}{2}]$