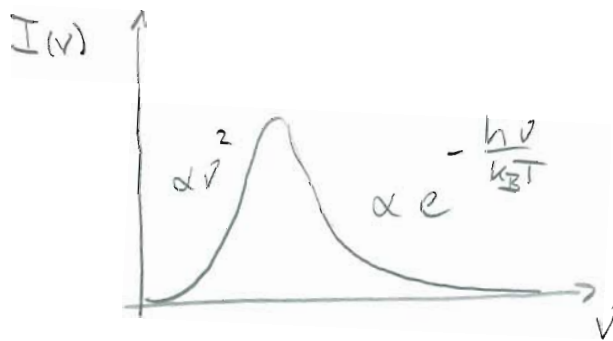


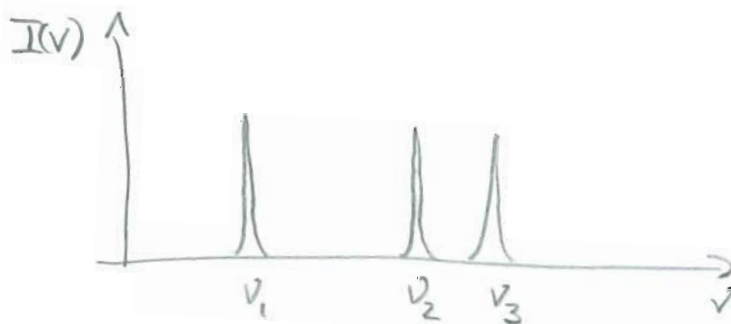
# Atomare Spektren, diskrete Energieeigen und das Bohrsche Atommodell

- heiße und dichte Materie erzeugt ein kontinuierliches Spektrum elektromagnetischer Strahlung



Spektrum eines **schwarzen Strahlers** nach Planck bei Temperatur  $T$

- unabhängig von Material (Element)
- **angeregte** weniger dichte **atomare** oder **molekulare Gase** erzeugen elektromagnetische Strahlung mit einem **diskreten Spektrum**



- Spektrum ist charakteristisch für spezifisches Element
- Wie kann die diskrete Struktur eines solchen Spektrums erklärt werden?

↳ Erklärungsversuche basierend auf klassischer Physik führen nicht zum Erfolg

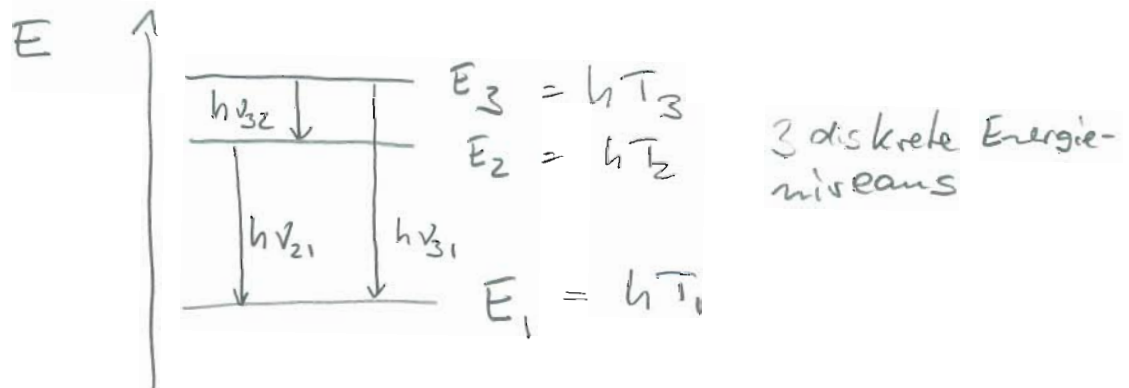
• Das Ritz'sche Prinzip (1908)

Die Frequenzen  $\nu_{if}$  aller Spektrallinien im Spektrum eines Elements sind gegeben durch die Differenzen zwischen je zwei Spektraltermen  $T_i$  und  $T_f$

$$\nu_{if} = T_i - T_f$$

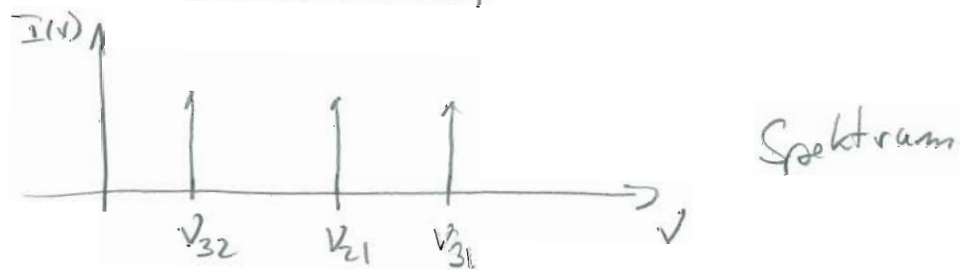
Die Gesamtheit aller Spektraltermen  $T_j$  ist charakteristisch für das betrachtete Element.

- betrachte Element mit 3 Termen



$$\begin{aligned} \nu_{21} &= T_2 - T_1 \\ \nu_{32} &= T_3 - T_2 \\ \nu_{31} &= T_3 - T_1 \end{aligned}$$

3 Spektrallinien



• Spektren:

- Die von Atomen emittierte oder absorbierte Strahlungslistung wird in Spektren gegen verschiedene Messgrößen aufgetragen

- Wellenlänge  $\lambda$  [m]

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{vac}}}{n}$$

mit  $n$ : Brechungsindex des betrachteten Mediums

- Frequenz  $\nu$  [Hz]

$$\nu = \frac{c}{\lambda_{\text{vac}}} = \frac{c}{n\lambda}$$

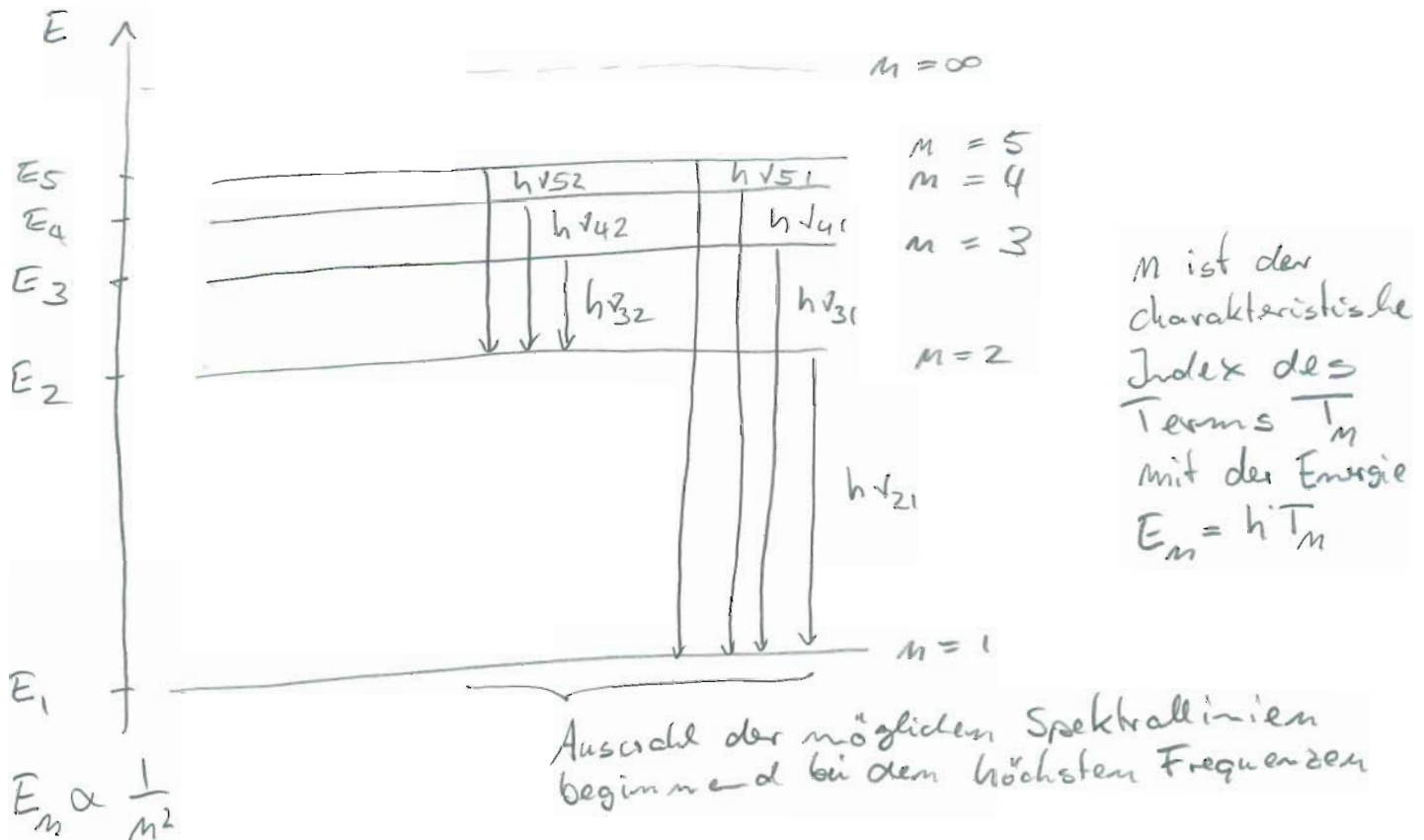
- Wellenzahl  $\bar{\nu}$  [ $\frac{1}{m}$ ]

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda_{\text{vac}}} = \frac{\nu}{c}$$

- Energie  $\frac{h\nu}{e}$  [eV]

# Das Wasserstoff-Atom

- einladestes Atom bestehend aus einem Proton ( $p^+$ ) im Kern und einem Elektron ( $e^-$ ) in der Hülle.
- besitzt sehr einfaches aus spektroskopischen Messungen bestimmtes Term Schema



- jeder Übergang  $\nu_{if}$  entspricht einer Spektrallinie im Spektrum des Wasserstoff
- einfache phänomenologische Beschreibung des Spektrums

$$\nu_{if} = R_0 c \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Rydberg-Formel

$$R_0 = 1.1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Rydberg-Konstante

$n_i$ : Anfangszustand (Term)

$n_f$ : Endzustand (Term)

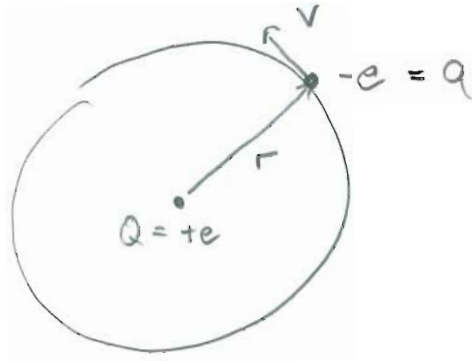
## • Serien von Spektrallinien im Wasserstoff-Atom

$n_f = 1$	:	Lyman-Serie	(UV)
$n_f = 2$	:	Balmer-Serie	(sichtbar)
$n_f = 3$	:	Paschen-Serie	} (infrarot)
$n_f = 4$	:	Brackett-Serie	
$n_f = 5$	:	Pfund-Serie	

## • Bohr'sches Modell des Wasserstoff-Atoms

- erstes einbachtes Modell zur Erklärung des Spektrums von Wasserstoff (1913)
- Ansatz: semiklassisches Modell mit Elektron als Materiewelle und Quantisierung des Drehimpuls

- klassisches Modell für Bahnbewegung des Elektrons im Wasserstoff-Atom



$r$ : Bahnradius  
 $v$ : Bahngeschwindigkeit  
 $q = -e$ : Elektronladung  
 $Q = +e$ : Kernladung

- stabile Bahn bei Kräftegleichgewicht  $\vec{F}_c + \vec{F}_z = 0$

$$\vec{F}_c = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{Coulomb-Kraft}$$

$$\vec{F}_z = \frac{mv^2}{r} \quad \text{Zentripetal-Kraft}$$

für Bahngeschwindigkeit

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}} \quad (*)$$

bei gegebenem Bahnradius  $r$

- Bestimmung des Bahnradius  $r$  aus Messung der Bindungsenergie des  $\bar{e}$  im Wasserstoff-Atom

- Gesamtenergie des  $\bar{e}$

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{kin}} + \bar{E}_p \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

Kinetische und potentielle Energie des  $\bar{e}$  auf der Bahn

$$= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} < 0$$

im Gleichgewicht (\*)

- Bindungsenergie

$$E = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} < 0$$

- maximale Ionisationsenergie des H-Atoms

$$E_1 = -13.6 \text{ eV} \quad \text{Messwert}$$

- resultierender Bahnradius des  $e^-$

$$r_1 = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 E_1} \approx 0.5 \text{ \AA} = 0.05 \text{ nm}$$

⇒ gute Abschätzung des tatsächlichen mittleren Bahnradius des  $e^-$

## • Strahlungsverluste

- Nach klassischer Elektrodynamik verliert das  $e^-$  auf seiner Bahn Energie durch Dipolstrahlung mit einer Rate, die von seiner Bahnbeschleunigung  $a$  abhängt.

$$\text{Strahlungsleistung} \quad P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

mit

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2}$$

$$P \approx 2.9 \cdot 10^{10} \frac{\text{eV}}{\text{s}}$$

⇒  $e^-$  sollte nach wenigen Nanosekunden im dem Kern gefallen sein

⇒ Quantenmechanik bestimmt den minimalen mittleren Bahnradius, der nicht unterschritten werden kann.

- betrachte die **Broglie Materiewellenlänge** des  $e^-$  auf klassischer **Bahn** um den Atomkern

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad \text{mit } v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r_1 m}}$$

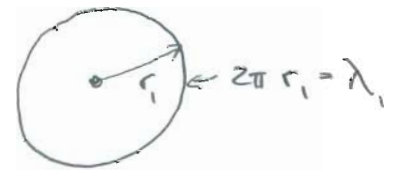
$$\text{und } r_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_1}$$

$E_1$ : Ionisationsenergie

$r_1$ : minimaler Bohrradius

$$\lambda_1 = 3.3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\stackrel{!}{=} 2\pi r_1$$



$\Rightarrow$  die Broglie Wellenlänge entspricht gerade der Länge der Umlaufbahn des Elektrons

$\rightarrow$  konstruktive Interferenz der Materiewelle des  $e^-$  mit sich selbst

$\Rightarrow$  die Bewegung des  $e^-$  auf dieser Bahn erfolgt strahlungslos

## • Bohr'sches Atommodell

- für das  $e^-$  im Wasserstoff-Atom sind nur solche **Bahnradien**  $r_n$  erlaubt für die die konstruktive Interferenzbedingung der Materiewelle des  $e^-$  gilt

$$\boxed{n \lambda = 2\pi r_n}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

wobei  $n$ : Hauptquantenzahl

$r_n$ :  $n$ ter Bohrradius



mit

$$m \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \Gamma_n}{m}} = 2\pi \Gamma_n$$

folgt

$$\Gamma_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} \quad (*) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$= n r_1$$

mit

$$r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{Bohr-Radius}$$

- Quantisierung des Betrags des Bahndrehimpuls  $\vec{L}$

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = \Gamma_n m v_n$$

$$= m e \sqrt{\frac{\Gamma_n}{4\pi\epsilon_0 m}} \quad \text{mit } \Gamma_n (*)$$

$$= n \hbar$$

$\Rightarrow$  wichtiger Aspekt der Quantenmechanik:

Drehimpulse sind in Einheiten von  $\hbar$  quantisiert

# Energieniveaus des $e^-$ im Wasserstoff-Atom

- Gesamtenergie des  $e^-$  in Abhängigkeit vom quantisierten Bahnradius  $r_m$

$$E_m = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_m} = - \frac{m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{m^2}$$
$$= - \frac{R_{oc}}{h} \frac{1}{m^2}$$

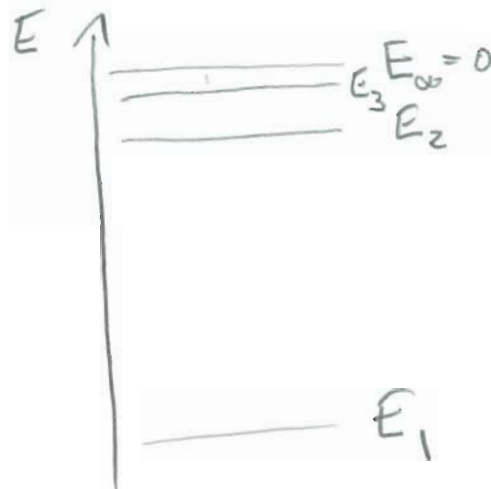
Quantisierung  
der Energie



$m = 1, 2, 3, \dots$

mit Rydberg-Konstante  $R_y = \frac{R_{oc}}{h} = 13.6 \text{ eV}$

- $E_m$  mit  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$  sind die für das  $e^-$  im Wasserstoffatom erlaubten Energieniveaus.
- $E_1$  ist die Energie des Grundzustands zur Hauptquantenzahl  $m = 1$
- $E_{2,3,4,\dots}$  sind die Energien der angeregten Zustände des  $e^-$  im Wasserstoff-Atom



$$E_m = -R_y \frac{1}{m^2}$$

- Berechnung der Frequenzen der Spektrallinien für Übergänge zwischen elektronischen Zuständen im Wasserstoff-Atom.

$$h \nu_{if} = E_i - E_f \\ = R_y \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

↳ erklärt phänomenologische Rydberg-Formel im Bohr-Modell

↳ beim Übergang eines Elektrons zwischen zwei Zuständen mit den erlaubten Energien  $E_i$  und  $E_f$  wird ein einzelnes Photon der Energie  $h \nu_{if}$  erzeugt.

