Physik IV - Lösungen - Serie 3

10. März 2011

1)a) Wiensches Verschiebungsgesetz: $\nu_{max} = \underbrace{5.878933 \cdot 10^{10}}_{\tilde{x}} \frac{Hz}{K} \cdot T$

$\Rightarrow$ Max von $u(\nu, T) \Rightarrow \nu \approx 160\ GHz \pm 10\ GHz$

$\Rightarrow \underline{T_0 = 2.72\,K}$ + Fehler

Fehler: $\Delta T_0 = \frac{1}{\tilde{x}} \Delta\nu \Rightarrow \Delta T = 0.17$

$\Rightarrow \underline{\underline{T_0 = 2.72\,K \pm 0.17\,K}}$

Für N Messungen und $T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$ ist ~~Fehl~~ Fehler $\Delta T = \frac{\Delta\nu}{\sqrt{N}}$

1b) $\int_{V_{univers}} u(\nu, T)\, dV \overset{!}{=}_{const} = U(\nu, T) = 8\pi \frac{h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} V$

Das Volumen aendert mit $V(t) = [d(t)^3] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{länge}}}{d_0}\, a^3(t) = \underline{V_0\, a^3(t)}$

$\Rightarrow$ Die Frequenz der Photonen aendert mit $\underline{\nu(t) = \frac{\nu_0}{a(t)}}$

Das ist gerade die Rotverschiebung!

Denn: i) Das Universum dehnt sich aus $\Rightarrow$ ii) alle Lichtquellen bewegen sich von uns weg

$\Rightarrow$ iii) Der Dopplereffekt verschiebt die Frequenzen ins Rote

$\Rightarrow$ iv) $\frac{\nu_{emittiert}}{\nu_{observiert}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{emi})} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{a(t_{emi})} = 1 + z$ ← Rotverschiebung $z = \frac{\lambda_{emit} - \lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{f_{emit} - f_{obs}}{f_{obs}}$

$t_{obs} = t_0 =$ heute

$a(t_0) = 1$

Da das Planck-Spectrum erhalten bleibt, muss gelten $\frac{h\nu(t_1)}{kT(t_1)} = \frac{h\nu(t_2)}{kT(t_2)}$

$\Rightarrow \frac{\nu(t_1)}{\nu(t_2)} = \frac{T(t_1)}{T(t_2)} \Rightarrow \underline{T(t) = \frac{T_0}{a(t)}}$

Für $t < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeit heute}}}{t_0}$ gilt $a(t) < a(t_0) \Rightarrow$ Wenn wir zurück in der Zeit gehen, wird

a) Das Universum kleiner

b) die Temperatur grösser

c) mit (b) der ~~ene~~ Mikrowellen hintergrund wandert ~~ins blaue~~ höhere Frequenz bands.

1c) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Volumen zur Zeit}}}{V(t)} = \delta t^2,\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Volumen heute}}}{V_0} = \delta t_0^2 \Rightarrow \left(\frac{V}{V_0}\right) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \overset{!}{=} \frac{a^3(t)}{a^3(t_0) = 1} \Rightarrow \underline{a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}}$

mit $t_0 = 13.75 \cdot 10^9\,y$

$\Rightarrow T(t_{SLS}) = T_0 \left(\frac{t_{SLS}}{t_0}\right)^{-2/3} = 3000\,K \Rightarrow t_{SLS} = \left(\frac{3000\,K}{2.72}\right)^{-3/2} t_0 \approx \underline{375383\,y}\ {}^{+35786}_{-34636}\,y$

②

$$j_i \frac{\lambda}{2} = L_i \qquad i = x, y$$

$$j = 1, 2, 3 \ldots$$

$$j_i = \frac{2\nu}{c} L_i$$

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$$

No. modes up to frequency ν is :

$$G(\nu) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \pi j^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2L}{c}\right)^2 \nu^2$$

$j > 0$

Lets not have polarisation in 2D.

Modendichte $g(\nu) = \frac{\partial G}{\partial \nu} = 2\pi \left(\frac{L}{c}\right)^2 \nu$

pro Volumen $\frac{g(\nu)}{L^2} = \frac{2\pi}{c^2} \nu$

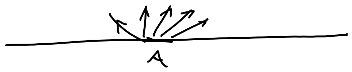
Planck $u(\nu) = h\nu \frac{2\pi}{c^2} \nu \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \nu^2 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ ||.

R-J $h\nu \ll kT \Rightarrow u(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \nu^2 \times \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\pi \nu}{c^2} kT$ ||.

Wien $h\nu \gg kT \Rightarrow$

$$u(\nu) = \frac{2\pi h \nu^2}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$ ||.

3a)



emitted energy (from surface A at an angle of Θ to the surface normal in frequency intervall $d\nu$ in time intervall Δt into a solid angle of $d\Omega$)

$$E(\nu,T)\,d\nu\,d\Omega = u(\nu,T)\,d\nu\; c\cdot \Delta t \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}\, A\cos\vartheta$$

(both polarisations)

radiation power into the total hemisphere (2π)

$\frac{\pi}{2} \hat{=}$ hemisphere

$$P_\Omega(\nu,T)\,d\nu = \int_\Omega \frac{E\,d\nu}{\Delta t}\,d\Omega = u(\nu,T)\,d\nu\,\frac{cA}{4\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta}_{1/2}$$

$$= \frac{cA}{4\pi}\,u(\nu,T)\,d\nu\;2\pi\cdot\frac{1}{2} = A\cdot\frac{c}{4}\,u(\nu,T)\,d\nu$$

integration over all frequencies gives the Stefan-Boltzmann law

$$S_\Omega = \int_0^\infty P_\Omega(\nu,T)\,d\nu = \frac{Ac}{4}\int_0^\infty u(\nu,T)\,d\nu =$$

$$= \frac{Ac}{4}\,\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$$

Mathematica

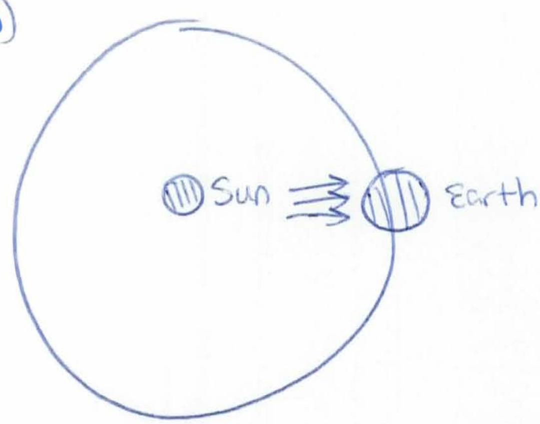
$$= \frac{Ac}{4}\,\frac{8\pi h}{c^3}\cdot\frac{k_B^4\,\pi^4\,T^4}{15h^4} =$$

$$= A\cdot\underbrace{\frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}}_{\sigma}\cdot T^4 = A\sigma T^4$$

Black bodies in space

3

(b)



Area presented to the sun is πr_E^2.

Power absorbed is

$$P_{in} = E_E \times \pi r_E^2 \times \frac{R_E^2}{R^2}$$

R_E: current orbit distance

R: new orbit distance

Power radiated by Earth as a black body,

$$P_{out} = \sigma T^4 \underbrace{4\pi r_E^2}_{\text{surface area}}$$

In thermal equilibrium $P_{in} = P_{out}$

$$\Rightarrow \sigma T^4 \, 4\cancel{\pi r_E^2} = E_E \cancel{\pi r_E^2} \frac{R_E^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{R_E} = \left(\frac{E_E}{4\sigma}\right)^{1/2} \frac{1}{T^2}$$

$\therefore$ For $T = 300\,K$,

$$\frac{R}{R_E} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} \left(\frac{1366}{5.67 \times 10^{-8}}\right)^{1/2} \frac{1}{300^2} = 0.86$$

$$\Rightarrow R = 0.86 \times 150 \times 10^6 \text{ km} = 130 \times 10^6 \text{ km}$$

(or thereabouts)

Thermische Abschirmung

$r_0 = 5\,mm$ $\quad r_1 = 150\,mm \quad r_2 = 200\,mm$

$T_1 = 4\,K \quad T_2 = 70\,K \quad T_3 = 300\,K$

$\varepsilon_0 = 1 \quad \varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = 0.05$

a) Da die Probe als schwarzer Strahler angenommen wird, und diese im thermischen Gleichgewicht mit der 4K-Schild ist, gilt:

$$T_0 = T_1$$

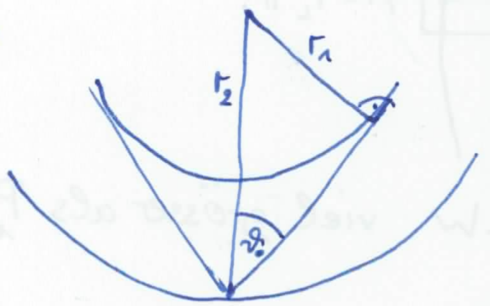
und für die Wärmeleistung

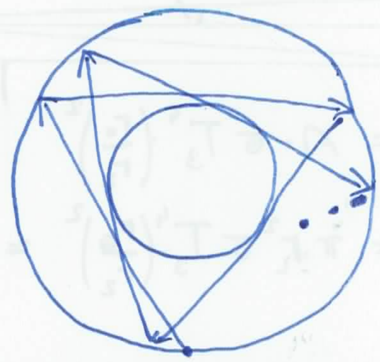
$$P_{0\to1} = P_{1\to0}\,.$$

Alle abgestrahlte Leistung wird vom 4K-Schild absorbiert ($\varepsilon_1 = 1$), damit ist

$$P_{0\to1} = 4\pi r_0^2\,\sigma T_0^4 = 4.56\,nW$$

b)





Absorption aller Strahlung, welche in einem Winkel $\vartheta < \vartheta_0$ vom 70K-Schild abstrahlt.

$\vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$

Abstrahlungsleistung $\propto \cos\vartheta$

$\Rightarrow$ Anteil auf 4K-Schild treffende Strahlung

$$x_{21} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_0} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta} = \dots = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

Alle Strahlung die in einem Winkel $\vartheta > \vartheta_0$ abstrahlt wird zu 5% absorbiert, der Rest reflektiert trifft aber nie das 4K-Schild. Nach ∞ Reflexionen ist alles absorbiert.

$$\Rightarrow P_{2\to 1} = 4\pi r_2^2 \varepsilon_2 \sigma T_2^4 x_{21} = 4\pi \cancel{r_2^2} \frac{r_1^2}{\cancel{r_2^2}} \varepsilon_2 \sigma T_2^4 =$$

$$= 4\pi r_1^2 \varepsilon_2 \sigma T_2^4 = 19\,\mathrm{mW}$$

c) Kühlleistung 70K-Schild

$$P_{3\to 2} = 4\pi r_2^2 \varepsilon_2 \sigma T_3^4 \approx 11.5\,\mathrm{W}$$

$$P_{2\to 3} = 4\pi r_2^2 \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \ll P_{3\to 2} \quad (\varepsilon_2 T_2^4 \ll \varepsilon_2 T_3^4)$$

$$P_{1\to 2} = 4\pi r_1^2 \Sigma \sigma T_1^4 \ll P_{3\to 2} \quad (r_1^2 \Sigma T_1^4 \ll \varepsilon_2 T_3^4 r_2^2)$$

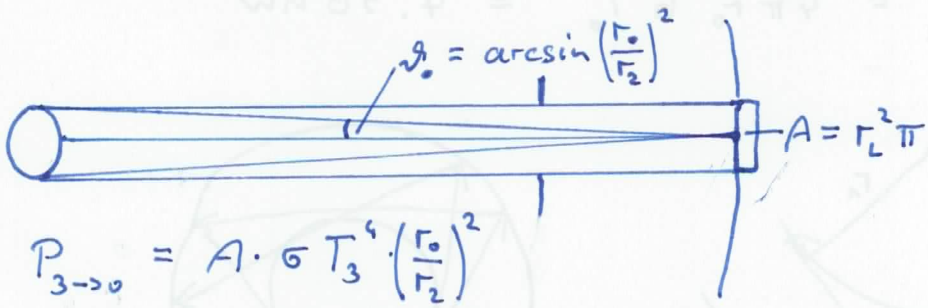
Σ: ε_2 (alles ausgesendete Strahlung ε_1 wird zu $(1-\varepsilon_2)$ reflektiert und wieder von $\varepsilon_1 = 1$ absorbiert)

Σ: kleiner 1

$$P_{2\to 1} = \text{siehe b)} \ll P_{3\to 2} \quad (r_1^2 \varepsilon_2 T_2^4 \ll \varepsilon_2 T_3^4 r_2^2)$$

$$P_2 = P_{3\to 2} + P_{1\to 2} - P_{2\to 3} - P_{2\to 1} \approx P_{3\to 2} = 11.5\,\mathrm{W}$$

d)



$$P_{3\to 0} = A \cdot \sigma T_3^4 \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2$$

$$= \pi r_L^2 \sigma T_3^4 \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2 \approx 23\,\mu\mathrm{W}$$ viel grösser als $P_{1\to 0}$

e) $\lambda_0 = 650\,\mathrm{nm}$ $\quad 2\cdot\Delta\lambda = 10\,\mathrm{nm}$

$$\nu_0 = \left(\frac{c}{\lambda_0 - \Delta\lambda} + \frac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\right)/2 \qquad \Delta\nu = \left(\frac{c}{\lambda_0 - \Delta\lambda} - \frac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\right)/2$$

Filterleistungsreduzierung:

$$\Gamma_{\Delta r,\infty} = \frac{\int_{\nu_0-\Delta\nu}^{\nu_0+\Delta\nu} P(\nu,T)\,d\nu}{\int_0^\infty P(\nu,T)\,d\nu} = \frac{\int_{\nu_0-\Delta\nu}^{\nu_0+\Delta\nu} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu}{\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu} \approx \frac{\frac{\nu_0^3}{e^{h\nu_0/kT}-1}\cdot 2\Delta\nu}{\frac{\pi^4}{15 (h/kT)^4}} \overset{x=\frac{h\nu}{kT}}{=} \frac{\frac{x_0^3}{e^{x_0}-1}\cdot 2\Delta x}{\frac{\pi^4}{15}}$$

$$\approx 6\cdot 10^{-28}$$

$\Rightarrow$ mit Filter trägt das Loch vernachlässigbar wenig zur eingestrahlten Wärmeleistung der Probe bei.