Physik IV - Schriftliche Sessionsprüfung Sommer 2009

9:00 – 11:00, Samstag, 8. August 2009, HG F1 & HG F3

Bitte zur Kenntnis nehmen:

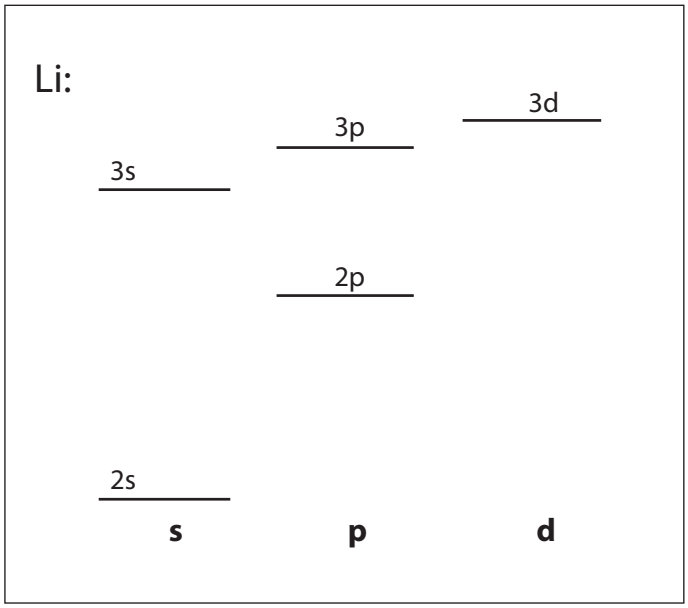
- Es befinden sich insgesamt **SECHS** Aufgaben auf **VIER SEITEN**.
- Es können insgesamt 60 Punkte erreicht werden. Die Punkte der einzelnen Teile einer Aufgabe sind in eckigen Klammern am rechten Rand ausgewiesen.
- Eine Tabelle mit physikalischen Konstanten befindet sich auf der Rückseite des Deckblattes.
- Sie sind berechtigt 10 Seiten handschriftliche Notizen sowie einen Taschenrechner und ein Wörterbuch bei der Prüfung zu verwenden.
- Bitte schreiben Sie KLAR und DEUTLICH. Falls wir Ihre Handschrift nicht entziffern können, können wir leider keine Punkte vergeben.
- Bitte fügen Sie UNTEN IHREN NAMEN ein. Dieses Blatt wird am Ende der Prüfung zu Ihren Antworten geheftet.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Ihrer abgegebenen Blätter.
- Während der Prüfung steht die Prüfungsaufsicht zur Beantwortung Ihrer Fragen zur Verfügung. Zögern Sie daher nicht, bei Unklarheiten diese zu stellen.

NAME:	VORNAME:

Fragen:	1	2	3	4	5	6	GESAMT
Punkte:							
Max:	7	9	10	11	10	13	60

Tabelle physikalischer Konstanten

Lichtgeschwindigkeit, c	3.00×10^{8} ms^{-1}
Planck Konstante, h	6.63×10^{-34} Js
$\hbar = h/(2\pi)$	1.05×10^{-34} Js
Elektronenladung, e	1.60×10^{-19} C
Elektronenvolt, eV	1.60×10^{-19} J
Elektronenmasse, m_e	9.11×10^{-31} kg
Neutronenmasse, m_n	1.67×10^{-27} kg
Atomare Masseneinheit, m_u	1.66×10^{-27} kg
Elektrische Feldkonstante, ϵ_0	8.85×10^{-12} As/Vm
Boltzmann Konstante, k_B	1.38×10^{-23} JK^{-1}
Bohrsches Magneton, μ_B	9.27×10^{-24} JT^{-1}
Bohr Radius, a_0	5.3×10^{-11} m
Stefan-Boltzmann Konstante, σ	5.67×10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}
Wiensche Verschiebungskonstante, b	2.9×10^{-3} mK



1. **Photoelektrischer Effekt**

   (a) Skizzieren Sie den grundlegenden Aufbau eines Experiments zur Messung des photoelektrischen Effekts. Erklären Sie anhand dessen die Grenzspannung $V_{\max}$ und deren Zusammenhang mit der maximalen kinetischen Energie der emittierten Elektronen. [2]

   (b) Im Experiment wird ein Metall mit Austrittsarbeit ϕ verwendet. Skizzieren Sie $V_{\max}$ als Funktion der Frequenz ν und geben Sie den Zusammenhang zwischen den Grössen an. [1]

   (c) Das verwendete Material sei Cs_3Sb mit einer Austrittsarbeit von $\phi = 1.8$ eV. Berechnen Sie ausgehend von einer gemessenen Grenzspannung von 2.4 V und einer Frequenz von $\nu = 10^{15}$ Hz des einfallenden Lichts das Planck'sche Wirkungsquantum h. [2]

   (d) Beschreiben Sie anhand einer Skizze, wie mehrere Cs_3Sb-Platten als Detektor einzelner Photonen verwendet werden können. [2]

---

2. **Materiewellen und Interferenz am Doppelspalt**

   (a) Helium (^{4}He) Atome werden an einem Doppelspalt gestreut und als Funktion des Winkels zur Strahlrichtung detektiert. Leiten Sie anhand einer Skizze des Strahlengangs der Doppelspaltgeometrie die Bedingungen für konstruktive und destruktive Interferenz her, wobei die Spaltbreite für die Herleitung vernachlässigt werden kann. Zeichnen Sie das zu erwartende Muster der Intensitätsverteilung. Welchen Einfluss hat die Breite der einzelnen Spalte? [3]

   (b) Der Abstand des ersten Intensitätsmaximums zur Strahlachsenmitte beträgt 12 μm bei einem Spaltabstand des Doppelspalts von 8 μm und einem Abstand von 1 m zwischen Doppelspalt und Detektor. Wie gross ist die Geschwindigkeit der Atome? [2]

   (c) Das selbe Experiment soll mit Elektronen wiederholt werden. Wie gross muss deren Geschwindigkeit gewählt werden, um die gleiche Separation der Intensitätsmaxima zu erhalten? Berechnen Sie ausserdem die Frequenz der deBroglie Welle. Überlegen Sie, ob hier relativistisch gerechnet werden muss. [2]

   (d) Berechnen Sie die Frequenz der Photonen, die zu derselben Intensitätsverteilung führen und geben Sie an, in welchem Spektralbereich diese Photonen liegen. Welche Effekte treten auf, wenn der Doppelspalt in kristallinem Material realisiert ist? [2]

3. **Emission und Absorption von Strahlung**

(a) Erklären Sie die Prozesse Absorption sowie stimulierte und spontane Emission bei der Wechselwirkung von Photonen mit einem quantenmechanischen 2-Niveau System. [3]

(b) In einem Behälter mit Temperatur T befindet sich ein Ensemble von N Atomen. Geben Sie die drei Differentialgleichungen zur Berechnung der Zeitabhängigkeit der Besetzungszahl des Grundzustands $n_0(t)$ bzw. des angeregten Zustandes $n_1(t)$ an. Ihre Antwort sollte die Einstein-Koeffizienten A und B sowie die spektrale Energiedichte der Strahlung $\rho(\nu)$ beinhalten. [2]

(c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ und bei einer Temperatur von $T = 0$ K befinde sich das Ensemble komplett im angeregten Zustand. Überlegen Sie, welchen Wert die spektrale Energiedichte $\rho(\nu)$ bei dieser Temperatur hat und berechnen Sie die Besetzungszahl des angeregten Zustands $n_1(t)$ zum Zeitpunkt t. [3]

(d) Im thermischen Gleichgewicht gilt $n_i = Ce^{-E_i/k_BT}$, wobei E_i die Energie des i-ten Niveaus ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Energiedichte der Strahlung dem Planck'schen Strahlungsgesetz folgt: [2]

$$\rho(\nu) = \frac{A}{B}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT} - 1}.$$

---

4. **Lösung der Schrödingergleichung für einen 1D Potentialtopf**

Ein Teilchen befindet sich in dem eindimensionalen Potential $V(x)$ mit

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty \quad x < 0, \\ V(x) &= 0 \quad\;\; 0 < x < L, \\ V(x) &= V_0 \quad x > L. \end{aligned}$$

(a) Leiten Sie ausgehend von der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die normierten Wellenfunktionen ϕ_n und die Energien der Eigenzustände für $V_0 = \infty$ als Funktion der Quantenzahl n her. [4]

(b) Skizzieren Sie die Form der gebundenen Eigenzustände ($E_n < V$) für endliches $V_0 > E_3$ sowie die entsprechenden Eigenzustände für $V_0 = \infty$. [2]

(c) Zeigen Sie, dass die gebundenen Eigenfunktionen für endliches V_0 die Form

$$\begin{array}{ll} \Psi(x) = 0 & x < 0 \\ \Psi(x) = A\sin(kx) & 0 < x < L \\ \Psi(x) = C\exp(-k'x) & x > L \end{array}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $k' = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ annehmen. E ist die Energie des Zustandes. [3]

(d) Zeigen Sie, dass die Wellenvektoren k und k' die Bedingung

$$\tan(kL) = -k/k'$$

erfüllen müssen, damit $\Psi(x)$ eine physikalisch gültige Wellenfunktion darstellt. [2]

---

5. **Quantenmechanik des Harmonischen Oszillators**

(a) Berechnen Sie die Kommutator-Relation $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ zwischen Ort $\hat{x}$ und Impuls $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. [2]

(b) Der Vernichtungsoperator eines harmonischen Oszillators der Masse m und Kreisfrequenz ω mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ist durch

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Relation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ gilt. [2]

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\Psi_0(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}$ für spezifisches α den Grundzustand des harmonischen Oszillators mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ beschreibt. Berechnen Sie dazu den Koeffizienten α aus der Forderung, dass die Wellenfunktion des Grundzustands bei Anwendung des Vernichtungsoperators verschwindet. [3]

(d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass die Position x des quantenmechanischen Oszillators im Grundzustand ausserhalb des klassisch erlaubten Bereichs liegt. Erstellen Sie dazu eine Skizze der Wellenfunktion und kennzeichnen darin Sie den klassisch erlaubten Bereich. Ihre Antwort soll in Form eines Integrals angegeben werden, das Sie jedoch nicht lösen müssen. [3]

6. **Quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms**

(a) Die quantenmechanische Beschreibung des freien Wasserstoffatoms beruht auf der Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$H\psi = E\psi \quad \text{mit} \quad H = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Identifizieren Sie die einzelnen Terme der Gleichung. In welchem Koordinatensystem kann die Gleichung analytisch gelöst werden und in welche Faktoren wird dazu die Wellenfunktion ψ zerlegt? Welche Bedeutung haben die Quantenzahlen n, l und m und welchen Wertebereich können sie annehmen? [3]

(b) Welche zusätzliche Quantenzahl muss zur vollständigen Beschreibung des Wasserstoffatoms eingeführt werden? Unter welchen Umständen macht sich dieser zusätzliche Freiheitsgrad in den Spektrallinien bemerkbar? [1]

(c) Skizzieren Sie die radialen Wellenfunktionen der $n = 1$ und $n = 2$ Zustände als Funktion des Elektron-Kern Abstands r. Berechnen Sie für ein Elektron im Zustand $n = 1$ den Abstand $r_{\max}$, bei dem die Wahrscheinlichkeit das Elektrons in einer Kugelschale der Dicke dr zu finden maximal wird. Der radial- bzw. winkelabhängige Teil der Wellenfunktion ist durch $R_{1,0} = 2(a_0)^{-3/2}e^{-r/a_0}$ bzw. $Y_{0,0} = \sqrt{1/(4\pi)}$ gegeben. [3]

(d) Die Kugelflächenfunktionen sind Eigenzustände des Bahndrehimpulsoperators $\hat{L}^2$. Berechnen Sie den Erwartungswert des Bahndrehimpulses eines Elektrons im Wasserstoffatom für Zustände Ψ_{nlm} mit $l = 2$ und skizzieren Sie die möglichen magnetische Quantenzahlen in einem Vektordiagramm. [3]

(e) Zeichnen Sie die möglichen Dipol-Übergänge des Alkali-Atoms Lithium (Li) in das Diagram auf dem Deckblatt ein. Geben Sie die Auswahlregeln für elektronische Dipolübergänge an. Wie und warum unterscheiden sich die Energieniveaus von denen des Wasserstoffatoms? [3]